Analyse didactique des processus de preuve dans le domaine numérique au cycle 3 de l'école primaire

Jacques Douaire

UNIVERSITÉ PARIS 7 – DENIS DIDEROT

Ecole doctorale : « Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines »

THESE

pour l'obtention du diplôme de

Docteur de l'Université Paris 7

Spécialité

Didactique des mathématiques

Présentée et soutenue publiquement

Le 8 décembre 2006

Par

Jacques DOUAIRE

Titre :

Analyse didactique des processus de preuve dans le domaine numérique au cycle 3 de l'école primaire

Directeur de thèse : Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN

Jury

Nicolas Balacheff	**Rapporteur**
René Cori	**Examinateur**
Viviane Durand-Guerrier	**Rapporteur**
Raymond Duval	**Président**
Marie-Jeanne Perrin-Glorian	**Directeur**
Christian Plantin	**Examinateur**

Sommaire

Chapitre 6 : Bilan et perspectives

Annexes

INTRODUCTION

1. POURQUOI UNE ÉTUDE DES PROCESSUS DE PREUVE AU COURS MOYEN ?

Le développement des savoirs mathématiques au primaire nécessite l'appropriation par les élèves de critères de jugement de leurs propres productions. Or, jusqu'au cycle 3, plusieurs systèmes de validation coexistent, la critique des résultats et des procédures s'effectuant selon différents critères : la validation pratique par l'effectuation de la tâche (répartir des objets pour vérifier un partage par exemple), la vérification par la confrontation des résultats aux données et contraintes de l'énoncé, le recours à des raisonnements. Certains seulement de ces critères seront valorisés durant l'enseignement secondaire. Si les propositions soumises au débat, voire les jugements portés individuellement ou par petits groupes peuvent être écrits, la confrontation de ces critiques et de leurs justifications s'effectue lors de mises en commun. Or ces propositions et leurs critiques sont élaborées dans un cadre scientifique en constitution.

Une première série de questions se pose : peut-on parler de preuve au Cours Moyen ? Est-il possible de développer des preuves à ce niveau ?

La production de preuves au Cours Moyen ne peut s'envisager que si elle contribue à créer un rapport plus adéquat de l'élève aux mathématiques, c'est-à-dire si les règles pour établir le vrai ou le faux apparaissent avec les spécificités propres à la discipline et non comme de simples contraintes ou conventions. Pour cela, il est nécessaire que les propositions soumises aux élèves présentent un enjeu suffisant pour qu'ils produisent des raisonnements et les mettent à l'épreuve ; si la proposition qu'il s'agit de prouver présente, dès l'origine, une évidence certaine, le travail de preuve ne permettra pas d'expliciter les conceptions erronées éventuelles ou de distinguer les critères de validation.

Une deuxième interrogation porte donc sur les problèmes et les situations susceptibles de permettre l'élaboration de ces preuves.

Le développement de preuves suppose la mise en œuvre de débats où elles puissent être formulées et critiquées au moyen d'argumentations produites par les élèves. Les interventions du maître sont encadrées par deux contraintes apparemment contradictoires : la dévolution de la preuve aux élèves et la garantie de la validité de propositions et arguments qui seront finalement retenus.

Sous quelles conditions, relatives aux situations, ces mises en commun peuvent-elles permettre la production de critiques et l'émergence de critères de preuve ? Ceci constitue une troisième interrogation.

2. PROGRAMMES ET PRATIQUES

Dans la pratique, la mise en œuvre de situations de preuve peut être problématique pour des enseignants du primaire, tant au niveau de l'analyse des enjeux scientifiques ou des capacités des élèves que dans la conduite des séances. En particulier la gestion des phases de débats où l'activité de l'élève ne doit pas être réduite à la formulation des résultats ou à l'explicitation des méthodes, le maître se chargeant de porter un jugement. De plus, les dispositifs d'enseignement proposant des problèmes de preuve sont rares au primaire.

Pourtant les programmes de 2002 pour l'école primaire et ceux de 2004 pour la 6ème posent la question de la preuve, mais aussi du rôle de l'argumentation dans l'accès à des raisonnements mathématiques. L'importance des interactions langagières dans la construction des savoirs disciplinaires y est aussi mise en évidence.

Le document d'application des programmes pour le cycle 3 précise : « La confrontation des résultats et des démarches dans des moments de débat, où la classe s'apparente à une petite «communauté mathématique», permet de développer les compétences dans le domaine de l'argumentation, oblige à considérer d'autres points de vue et donc contribue au développement de la socialisation, par l'écoute et le respect de l'autre, dans la mesure où la détermination du vrai et du faux y est plus facilement indépendante des préjugés et des idéologies. Ces situations d'argumentation offrent une première occasion de sensibiliser les élèves à la question du statut particulier de la preuve en mathématiques. Si dans certains cas, celle-ci relève d'une expérience, dans d'autres cas elle s'appuie sur des connaissances mathématiques. » (M.E.N. 2002)[1]

Au niveau du collège, les programmes indiquent : « La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder les élèves à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration. » (M.E.N. 2004) Ce même texte précise : « A cet égard, deux étapes doivent être distinguées : la recherche de la production d'une preuve, d'une part, la mise en forme de cette preuve, d'autre part. Le rôle essentiel de la première étape (production d'une preuve) ne doit pas être occulté par les exigences de la deuxième (mise en forme de la preuve) ». Le programme de 6e demandant d' « habituer l'élève à justifier ses affirmations, à argumenter à propos de la validité d'une solution… ».

3. ORIGINE ET CONTEXTE DE L'ÉTUDE

Ces interrogations sur le développement de preuves sont étroitement liées aux travaux de recherche que j'ai menés dans le cadre de l'INRP depuis douze ans. Trois types de recherche ont porté sur les questions de preuve et la gestion des phases de validation par les enseignants.

La production d'ingénieries didactiques sollicitant des problèmes de preuve

En premier, l'équipe de didactique des mathématiques à l'école élémentaire de l'INRP (équipe ERMEL) a produit, dans le cadre de plusieurs recherches successives, des ingénieries didactiques, pour chacun des niveaux depuis la Grande Section jusqu'au CM2 portant sur les apprentissages numériques et la résolution de

[1] Document d'application des programmes. Mathématiques, cycle des approfondissements (CNDP 2002)

problèmes. Les publications issues de ces recherches sont destinées aux enseignants de l'école primaire et sont constituées par une explicitation des enjeux des apprentissages, et une présentation de choix d'enseignement comprenant un ensemble complet de situations didactiques. Pour le Cours Moyen ces propositions sont publiées dans les ouvrages « Apprentissages numériques et résolution de problèmes » pour le CM1 (ERMEL 1997) et pour le CM2 (ERMEL 1999 a). La conception de l'apprentissage que nous développons donne une place importante à la résolution de problèmes, ce qui suppose que les élèves puissent, face à des situations nouvelles, élaborer des procédures de résolution, mais aussi valider leurs productions. Or ces possibilités de validation évoluent au cours du cycle 3, des raisonnements s'appuyant sur des propriétés peuvent être élaborés et critiqués par les élèves.

Aussi, il a été nécessaire, dans le cadre de la recherche « Apprentissages mathématiques et argumentation au cycle 3 » [2] menée entre 1994 et 1997, d'expliciter les compétences des élèves du Cycle 3 dans le domaine de la preuve et de l'argumentation en mathématiques en nous appuyant sur les travaux produits dans différents champs scientifiques. Nous avons aussi proposé des problèmes de preuve au Cours Moyen afin de connaître les potentialités des élèves et de mettre à l'épreuve des situations que les enseignants pourraient ensuite s'approprier. Les résultats de ce travail sont présentés dans une publication coordonnée par Christiane Hubert et moi-même (« Vrai ? Faux ? … On en débat ! De l'argumentation vers la preuve au cycle 3 » (ERMEL 1999 b).

En particulier, nous avons élaboré des problèmes de preuve, qui, pour la plupart, prolongeaient des problèmes de recherche, par une interrogation complémentaire sur l'unicité d'une solution produite ou l'impossibilité de trouver une solution pour d'autres valeurs des données, ou la recherche de toutes les solutions. Ce sont les preuves produites dans ces situations expérimentées plusieurs années de suite dans les classes des collègues avec qui je travaillais plus particulièrement qui constituent les principales données de cette présente étude.

A la suite de ces travaux dans le champ numérique, notre équipe a réfléchi sur les types de preuve que les élèves peuvent produire au cycle 3 en géométrie. Elle l'a fait dans le cadre de la recherche INRP « Rôle de l'argumentation dans les phases de validation en géométrie au cycle 3 »[3] qui étudie notamment les conditions d'un passage à une géométrie basée non pas seulement sur des évidences spatiales, mais sur des raisonnements fondés sur des propriétés. Les résultats de cette recherche, qui propose une ingénierie complète pour le cycle 3, sont publiés dans « Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3 » (ERMEL 2006), destiné aux enseignants et aux formateurs.

Une comparaison du rôle de l'argumentation entre les disciplines

Le rôle de l'argumentation dans l'acquisition des connaissances à l'école primaire et au début du collège a aussi été étudié dans le cadre de la recherche « Argumentation et démonstration dans les débats et les discussions en classe »[4]. L'objet de cette recherche était d'analyser quelles modifications l'introduction d'un travail argumentatif entraîne dans les régimes de vérité propres à chaque discipline, à l'école ou au collège. En mathématiques, nous cherchions à préciser comment

[2] Responsables : Roland Charnay, Jacques Douaire, Jean-Claude. Guillaume et Dominique Valentin.
[3] Responsables : R.Charnay et J.Douaire (INRP 2001-2004).
[4] Responsable : Jacques Colomb (INRP 2000-2003)

coexistent, au début du collège, les différents types de preuves déjà évoqués pour le primaire. Pour mener à bien cette comparaison entre les différentes disciplines, nous avons notamment analysé une vingtaine de débats menés dans cinq disciplines (français, mathématiques, SVT, physique, histoire-géographie) dans une même classe de 5ème, dans le collège situé dans la ZEP d'une des écoles élémentaires pour laquelle de nombreuses expérimentations effectuées en CM1 ou CM2 sont analysées dans cette présente étude. Les résultats de cette recherche pluridisciplinaire ont été publiés dans l'ouvrage « Argumentation et disciplines scolaires » (Douaire et al. 2004).

Deux études sur la gestion par les enseignants des mises en commun

La production de situations pour le cycle 3, où les mises en commun prennent une place croissante dans la validation des productions, a conduit quelques membres de l'équipe ERMEL à analyser, dans le cadre de la recherche « Evaluations et développements de dispositifs d'enseignement en mathématiques » (ADIREM/INRP 1999/2002), la gestion, par des enseignants ayant quelques années d'exercice, des mises en commun issues de situations élaborées précédemment et publiées dans ERMEL CM1. La question centrale étant celle des relations entre l'organisation didactique et l'activité mathématique réelle de l'élève. Les résultats de cette recherche sont publiés dans Douaire J., Argaud H.-C., Dussuc M.-P., Hubert C. (2003).

Les questions abordées dans ces recherches présentent donc plusieurs convergences. D'une part, elles portent sur la preuve, sa dévolution aux élèves ; le rôle de l'argumentation dans la construction des connaissances est au centre de ces travaux. D'autre part elles concernent l'analyse des conditions relatives aux situations didactiques et en particulier aux mises en commun pour l'élaboration d'ingénieries didactiques utilisables dans des conditions ordinaires, avec des spécificités liées au champ, numérique ou géométrique.

4. PROBLÉMATIQUE ET OBJET

L'étude présentée dans cette thèse vise à dégager des conditions relatives aux situations didactiques, permettant l'élaboration par les élèves de processus de preuve, au Cours Moyen, dans le domaine numérique et gérables dans l'enseignement ordinaire. Elle conduit à reprendre certains des travaux évoqués précédemment.

Elle ne traite pas les questions posées par l'apprentissage de la démonstration qui relève du collège, mais elle pose celle du recours progressif au primaire à des preuves cohérentes avec les exigences de rationalité des mathématiques.

Elle est limitée au domaine numérique. En effet, si l'analyse des processus de preuve en géométrie au cycle 3 peut s'appuyer sur de nombreux travaux communs relativement à la conception de l'apprentissage, aux possibilités de raisonnements, aux fonctions des phases de validation, les spécificités des apprentissages géométriques, notamment les relations entre des savoirs de nature et d'origine différentes (connaissances spatiales liées à l'expérience, savoirs géométriques…), et les évolutions des systèmes de contrôle co-existant (validations perceptives, recours à la mesure, premières déductions s'appuyant sur des propriétés) font de la question de la preuve en géométrie une problématique spécifique.

Pour étudier ces processus de preuve j'ai choisi des problèmes de recherche et non des situations visant des apprentissages notionnels. Aucune institutionnalisation de notions n'est visée. L'enjeu des situations analysées n'est pas une évolution de connaissances dont la diversité dans la classe interfèrerait avec les processus de preuve.

Une caractéristique de cette étude est qu'elle analyse des expérimentations qui ont été principalement conduites pour l'élaboration d'ingénieries didactiques lors de la recherche « Apprentissages mathématiques et argumentation au cycle 3 ». Ce choix permet de disposer de données portant sur des progressions concernant plusieurs classes sur plusieurs années. Il permet aussi d'analyser un processus d'élaboration de situations où progressivement les potentialités des élèves se dégagent et où les limites de certaines situations sont maintenant interprétables différemment. Il pose ainsi la question des conditions de la robustesse des situations pour une utilisation par des enseignants dans des conditions ordinaires qui garantisse l'activité mathématique des élèves.

Nos principales hypothèses sont :

1- Les élèves du cycle 3 sont capables de développer des preuves qui soient compatibles avec la rationalité mathématique.

2- Des problèmes de recherche permettent le développement des processus de preuve.

3- La critique des preuves et l'émergence de critères supposent une organisation didactique des phases de validation.

5. PRÉSENTATION

Cette étude s'appuie sur des travaux issus de différents champs scientifiques : didactique des mathématiques pour les processus de preuve et les conditions sur les situations, psychologique pour les raisonnements, relevant de différentes disciplines pour l'argumentation. La présentation de ce cadre constitue le premier chapitre.

L'explicitation préalable des problèmes de preuve et des caractéristiques des situations didactiques est présentée au chapitre 2.

L'analyse des preuves produites par les élèves est principalement développée au chapitre 3. Elle conduit à une explicitation des caractéristiques des situations qui est approfondie au chapitre 4 en se centrant plus particulièrement sur une des situations, où les argumentations élaborées par les élèves sont comparées dans deux expérimentations conduites à deux ans d'écart.

Une analyse de la gestion d'une mise en commun d'une de ces situations dans des conditions ordinaires est développée au chapitre 5.

Le dernier chapitre reprend, en fonction des résultats produits, les questions initiales et présente des perspectives de recherche.

Chapitre 1
CONSTRUCTION D'UN CADRE THÉORIQUE

Nous présentons dans ce chapitre le cadre théorique de cette étude sur l'analyse de dispositifs didactiques visant l'élaboration par les élèves de processus de preuve. Les éléments de ce cadre portent sur les critères d'analyse des preuves que peuvent produire des élèves du Cours Moyen, mais aussi sur les fonctions et le statut des argumentations développées pour leur élaboration, ainsi que sur les conditions relatives aux situations didactiques.

1. ELÉMENTS D'ANALYSE DES PREUVES

Parmi les travaux conduits sur le thème de la preuve, notre première référence est constituée par les travaux de Nicolas Balacheff (1988) sur « Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves du Collège ». Balacheff part de l'hypothèse que les élèves ne donneront leur véritable signification aux démarches de validation en mathématique que si elles apparaissent comme des moyens fiables et efficaces pour établir la vérité d'une proposition. Constatant que souvent les situations d'enseignement mathématique déchargent les élèves de la responsabilité du vrai (l'énoncé en question est en fait affirmé vrai, ce qui est à découvrir c'est une démonstration), il propose de poser des problèmes de preuve et d'amener les élèves à prendre la responsabilité de les résoudre. Il énonce la nécessité de découvrir et de prendre en compte la rationalité dont disposent les élèves initialement. Ces travaux concernent donc d'une part l'élève, étudié dans ses démarches en vue d'établir une proposition ou de traiter une réfutation, et d'autre part, le système didactique pour en étudier les contraintes et les spécificités comme lieu où prennent place ces démarches, les comportements des élèves sont étudiés « non pour eux-mêmes mais comme des indices du fonctionnement des situations » (Balacheff, 1988, p 24.).

Nous serons conduits à utiliser les outils théoriques présentés dans cette thèse pour analyser les preuves produites par les élèves et les situations didactiques expérimentées. Nous nous appuierons aussi sur d'autres travaux pour préciser les caractéristiques des processus de preuve au niveau de l'école primaire, notamment en ce qui concerne la résolution de problèmes et l'argumentation en mathématiques.

1.1 La notion de preuve

Nous prendrons donc comme point de départ la définition de la preuve que donnait Balacheff en 1987 : « Nous appelons *preuve* une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs» (Balacheff, 1987, p 148). L'année suivante Balacheff énonçait dans sa thèse : « lorsqu'une explication est reconnue et acceptée, il convient pour la désigner de disposer d'un terme qui permette de marquer son détachement du sujet locuteur. En mathématiques il est clair que le terme « démonstration », du fait de son acception très spécifique ne convient pas. Nous retiendrons celui de preuve.» (Balacheff,1988, p 29).

Ces définitions de la preuve comportent plusieurs dimensions : d'une part, elles affirment la dépersonnalisation de la preuve et lui confèrent une dimension sociale en la rendant dépendante d'une communauté donnée qui doit expliciter ses propres critères de validité. D'autre part, elles appuient la notion de preuve sur celle d'explication : « le passage de l'explication à la preuve fait référence à un processus social par lequel un discours assurant la validité d'une proposition change de statut en étant acceptée par une communauté. Ce statut n'est pas définitif, il peut évoluer dans le temps avec l'évolution des savoirs sur lequel il s'appuie ».
En effet, Balacheff (1988 p 28) écrit qu'une explication « vise à rendre intelligible à un autrui la vérité de la proposition déjà acquise pour le locuteur ». Il précise : « A la suite de Piaget nous dirons qu'expliquer, sur le terrain des sciences déductives, c'est d'abord dégager les « raisons » pour « répondre à la question du pourquoi » ». Cette définition caractérise l'intention fondamentale de l'activité scientifique, rendre raison des phénomènes. Mais, du point de vue de l'interaction, le locuteur est, dans le cas d'une explication, un expert reconnu par l'auditeur pour sa neutralité et sa compétence, même si en sciences tout discours explicatif y est théoriquement contestable et problématique, et que le terme « explication » n'est pas toujours entendu comme un passage d'informations de celui qui sait à celui qui ne sait pas, il n'y a pas toujours parité entre les interlocuteurs. Sur ce point, nous pouvons nous référer à J.B. Grize (1990 p 106) qui distingue aussi explication et argumentation. Pour lui, il y a trois conditions pour qu'un discours soit pris comme une explication :

> «1- Le fait, le phénomène à expliquer doit être hors de contestation. Le mettre en doute serait passer d'un discours explicatif à un discours polémique.
>
> 2- Ce qui fait question en lui n'est donc pas dans son existence mais dans sa cohérence avec des savoirs établis par ailleurs.
>
> 3- Celui qui propose une explication doit être tenu pour compétent et neutre. La compétence conduit à un discours d'autorité… ».

Mais, lors d'un débat en classe entre pairs, dans un domaine où les critères sont en constitution, les processus de preuve étudiés supposent que la vérité ne soit pas établie préalablement par un locuteur mais collectivement par une communauté, sauf à accepter qu'un élève dispose d'une autorité (scientifique, scolaire…) qui inhiberait la remise en question par les autres de ses propositions. Il est essentiel que les élèves puissent critiquer les explications données par d'autres. Les échanges développés dans ce contexte ont donc une dimension plus argumentative qu'explicative. Cet aspect est aussi souligné par Raymond Duval (1992-1993 p 40) : « une explication donne une ou plusieurs raisons… pour rendre compréhensible une donnée (un phénomène, un résultat, un comportement…). Or les raisons avancées ont en réalité une fonction quasi-descriptive : elles contribuent à présenter le système de relations au sein duquel la donnée à expliquer se produit ou trouve sa place». Si la production de raisons relève de l'explication, l'examen d'acceptabilité de ces raisons relève de l'argumentation, car comme le précise Duval dans le même article (p 38) : « elle représente souvent une activité trop importante par elle-même pour entraîner *ipso facto* un examen explicite de leur acceptabilité ».

Dans la communauté que constitue la classe la critique des productions s'effectue au moyen d'argumentations s'appuyant sur des connaissances lors de mises en commun ; les critères de validité spécifiques aux mathématiques, qui sont en constitution, pourront être explicités voire institutionnalisés à ces occasions.

Notre conception de la preuve est donc plus proche de la définition qu'en donnait Fernando Gil (1988 p 10) : « une proposition est dite prouvée si, ayant été obtenue moyennant une méthode généralement reconnue, elle fait l'objet d'une croyance justifiée. » F. Gil précisait que « cette formulation permet de distinguer quatre versants dans la théorie de la preuve : un élément sémantico-formel (la proposition qu'il s'agit de prouver), un dispositif objectif (la méthode) ayant des effets subjectifs (la croyance) et intersubjectifs (la reconnaissance générale) ».

Si cette définition, non spécifique aux mathématiques, présente des points communs avec celle donnée par Balacheff, la méthode et sa reconnaissance pour Gil, le système de validation et son acceptation pour Balacheff, elle met l'accent sur la modification de la valeur épistémique, du degré de crédibilité accordé à la proposition, et sa justification. Elle permet une appréhension du processus de preuve intégrant les dimensions argumentatives.

Balacheff définit les processus de validation comme le raisonnement « lorsque sa finalité est de s'assurer de la validité d'une proposition et éventuellement de produire une explication (respectivement une preuve ou une démonstration) ». Nous serons donc conduits à préciser les différences entre ces termes. Nous considérerons que les processus de preuve sont constitués par les preuves et par les critiques de celles-ci produites par les élèves.

1.2 Preuve et démonstration

Bien que notre étude concerne l'enseignement primaire, le développement de processus de preuve en mathématiques pose la question de leurs relations avec la démonstration. Comme le précise Balacheff (1988 p 15), celle-ci est d'une part un outil de preuve, le seul accepté dans la communauté des mathématiciens, elle renvoie à une pratique qui permet à la fois la communication et l'évaluation ; elle est aussi « un objet d'étude pour le logicien ; elle reçoit une définition précise dans le cadre de théories formalisées » avec des exigences de rigueur qui ont évolué.

La démonstration est donc cette forme particulière de preuve dont l'emploi systématique caractérise les mathématiques parmi les sciences. Depuis le VIème siècle avant notre ère les méthodes acceptées pour prouver des connaissances nouvelles en mathématiques sont basées sur le recours à des raisonnements hypothético-déductifs garantissant le double caractère de nécessité et d'impersonnalité. Ainsi que le précise Gilbert Arsac (1988 p 274) ce qui apparaît chez les Grecs, c'est simultanément la définition d'objets mathématiques comme des objets idéaux, indépendants de l'expérience sensible et la démonstration prouvant les assertions en s'appuyant uniquement sur les axiomes, les définitions et les règles de la logique, en particulier le tiers exclu. Les formes antérieures de preuve ont été abandonnées au profit du raisonnement hypothético-déductif, où pour prouver une assertion, on s'appuie sur une proposition connue comme étant vraie, qu'elle soit admise ou déjà démontrée, en utilisant une règle logique de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Dès la constitution des mathématiques comme science, la démonstration occupe donc une place centrale : elle est un outil de preuve. Pour les Grecs, la démonstration est de l'ordre de la conviction dans un débat contradictoire, dont le but est que les membres de l'auditoire n'aient pas d'objection à opposer à chacune de ses étapes. Cette modification des méthodes de preuve s'est effectuée dans une civilisation où de nombreuses décisions se prenaient à l'issue de débats publics. Toutefois, l'interprétation du poids relatif, dans l'évolution des mathématiques, de cette influence sociale, où les décisions en mathématiques supposaient qu'il y ait un accord sur des critères explicites et n'étaient plus imposées par une autorité ou selon des techniques connues des seuls initiés, et des causes internes, spécifiques aux mathématiques, la résolution de problèmes ne pouvant pas avoir de solution sans le recours à la démonstration, diffère selon les historiens des sciences.

Au 17e siècle, comme le précise Evelyne Barbin (1993), des logiciens (Arnaud, Nicole,…) reprochèrent aux géomètres de l'Antiquité de n'avoir légué dans leurs écrits que des démonstrations synthétiques n'indiquant pas le raisonnement qui avait pu les guider dans leurs recherches, ce qui ne permettait pas de voir comment une propriété avait été découverte. Ces philosophes souhaitaient donc que le but de la démonstration soit plus d'éclairer, de permettre de bien comprendre pourquoi un énoncé est vrai, que de convaincre. En cela ils distinguaient les phases d'analyse (qui part de ce qui est cherché pour « remonter » jusqu'à des propriétés connues, où le problème est « délié », pour reprendre l'étymologie du mot « analyse ») de celles de synthèse (qui recompose les différentes étapes pour présenter un enchaînement logique), et ils regrettaient que les méthodes qui avaient permis d'aboutir à des propriétés ne soient plus identifiables dans l'exposé de leur démonstration.

Aussi, comme le précise Barbin (1993 p 103), démontrer peut avoir plusieurs significations : « convaincre pour savoir, éclairer pour savoir comment on sait et intéresser pour savoir pourquoi on sait ». Barbin remet en cause la tendance à voir l'apprentissage de la démonstration de façon autonome, par rapport à la construction des objets mathématiques et d'une rationalité mathématique. Elle compare trois conceptions de la démonstration liées à trois conceptions des mathématiques : une conception réaliste qui prône une découverte des objets mathématiques préexistant dans le réel, la démonstration étant un moyen de suppléer à l'insuffisance des moyens d'observation, une conception idéaliste pour laquelle il y a invention des objets mathématiques et qui présuppose la nécessité avant tout enseignement de la démonstration de connaître les règles de la logique et une conception constructiviste où la construction des objets mathématiques qui structurent le réel pour laquelle il y a simultanéité entre la construction des objets mathématiques, la construction d'une rationalité mathématique et l'activité de démonstration. Au 19è siècle la démonstration devient un objet d'étude pour le logicien. Si le rôle attribué à la démonstration a évolué, elle a toujours conservé trois caractères permanents, comme Arsac le précise, le caractère a priori qui permet de faire l'économie de l'expérience, le caractère de nécessité qui suppose le respect de règles rigides, le caractère universel, les objets sur lesquels porte le raisonnement ayant un statut d'abstraction.

Mais le travail du mathématicien ne peut être réduit à la production de démonstrations, il consiste d'abord à poser et résoudre des problèmes, qui, pour certains d'entre eux ont pu être énoncés longtemps auparavant, à formuler des conjectures, à émettre des hypothèses… Le cheminement de la recherche peut alors être très différent de la mise en forme ultérieure des étapes d'une démonstration.

L'analyse des enjeux didactiques de la démonstration et, à plus forte raison, de son apprentissage, qui concerne le second degré, n'est pas un objet de notre étude. Toutefois des points de convergence très forts apparaissent entre les choix que nous développons et certaines approches de l'apprentissage de la démonstration : celui-ci ne saurait se réduire à la mise en place de formes langagières stéréotypées dans des situations où la solution est évidente. Pour ces raisons, nous pouvons, avec Arsac (1987 p 307), avancer l'idée que l'apprentissage de la démonstration doit être précédé de la pratique de preuves dans des situations de classe où la nécessité de valider une assertion apparaît comme une question qui se pose aux élèves et non comme une exigence du maître.

1.3 Les processus de preuve au collège : l'étude conduite par N.Balacheff

Balacheff (1988 pp 43-45) distingue des preuves pragmatiques et des preuves intellectuelles. Les premières recourent à l'action effective ou à l'ostention qui est « la forme la plus élémentaire d'expression d'une preuve où les opérations et les concepts qu'elle mobilise sont agis, donnés à voir, ils ne sont ni différenciés ni articulés » il précise que « cela ne signifie pas l'absence de tout langage, mais il n'est pas à ce niveau l'outil fondamental de transmission des connaissances ». Les preuves intellectuelles « se détachent de l'action et reposent sur des formulations des propriétés en jeu et de leurs relations. »

Balacheff précise quatre niveaux :

1) L'empirisme naïf, qui consiste à assurer la validité d'un énoncé après sa vérification sur quelques cas.

2) L'expérience cruciale, où pour tester une hypothèse ou tenter de convaincre de la vérité d'une proposition, l'élève choisit un grand nombre pris dans un sens un peu au hasard en (se) disant : « si ça marche pour ce nombre (dans ce cas), ça marche tout le temps (c'est à dire, c'est vrai) ». Ce niveau de preuve se distingue du précédent car l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaît pour aussi peu particulier que possible. L'origine de l'expérience cruciale pouvant être dans la prise de conscience de l'insuffisance de la vérification initiale sur quelques exemples et l'impossibilité, en termes cognitifs ou langagiers, où se trouvent les élèves à aller au-delà. Mais Balacheff précise que l'expérience cruciale prend une signification différente dans l'interaction sociale où elle devient un moyen de trancher un conflit sur la validité d'une assertion, ou sur le choix entre deux conjectures.

3) L'exemple générique qui consiste à montrer pourquoi une proposition est vraie en expliquant des transformations générales opérées sur un objet particulier. L'élève ne choisit pas un nombre comme preuve d'une proposition générale, mais pour décrire un procédé, une série de transformations que l'on peut appliquer à d'autres nombres, ce qu'il ne peut faire autrement, ne disposant pas d'un langage formalisé.

4) L'expérience mentale qui invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle diffère de l'exemple générique car les relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en œuvre, les propriétés ne sont plus attestées sur des représentants mais formulées dans leur généralité.

Dans son analyse initiale de ces niveaux de preuve Balacheff précise que le recours à l'expérience mentale marque le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles dans la mesure où ce ne sont plus des actions effectives, mais des actions intériorisées qui sont mises en œuvre. Balacheff note aussi que le langage utilisé par les élèves est un langage de familiarité où l'action exprimée porte la marque du temps et de la situation; il est aussi un langage personnalisé qui permet de décrire et d'expliquer l'action.

Mais pour élaborer des démonstrations, le langage doit évoluer et son élaboration requiert en particulier :

« - une décontextualisation, abandon de l'objet actuel, lieu effectif de la réalisation des actions, pour accéder à la classe des objets indépendamment des circonstances annexes ou anecdotiques de leur apparition ;

- une dépersonnalisation, en détachant l'action de celui qui en a été l'acteur et dont elle se doit d'être indépendante ;

- une détemporalisation, dégageant les actions de leur date et de leur durée anecdotique ; ce processus est celui fondamental du passage de l'univers des actions à celui des relations et des opérations (au sens piagétien). (Balacheff 1988 p 46)

Pour Balacheff, le passage des preuves pragmatiques, où les théorèmes-en-acte, que Gérard Vergnaud définit comme des propriétés que le sujet utilise dans la résolution de problèmes sans pour autant être capable de les énoncer, jouent un rôle central, aux preuves intellectuelles repose ainsi « sur trois pôles qui interagissent fortement : le pôle des connaissances, le pôle langagier, ou de la formulation, le pôle de la validation, ou des types de rationalité qui sous-tendent les preuves produites ». Un même élève n'est pas caractérisé par un seul niveau de preuve, dans la mesure où ce niveau va être fonction des connaissances qu'il maîtrise dans chacun des domaines mathématiques concernés.

Dans les conclusions de sa thèse Balacheff (1988 p 566) met plus encore en évidence le saut entre, d'un côté, l'empirisme naïf et l'expérience cruciale qui relèvent d'une même rationalité empirique (selon laquelle l'accumulation des faits fonde la conviction dans la validité d'une assertion), et l'exemple générique et l'expérience mentale de l'autre. Il parle d'un passage d'une vérité affirmée sur la base d'une constatation de fait à celle fondée sur une raison. Les sources de l'empirisme naïf « renvoient à deux types très différents de phénomènes : l'évidence des faits et l'évidence des raisons ».

1.4 Les preuves au Cours Moyen

Dans les classes antérieures au Cours Moyen, les élèves ont en premier recours à une validation pratique tant dans le domaine numérique que géométrique. C'est l'effectuation de l'action au début du cycle 2 qui leur permet en dernier lieu de vérifier, par exemple, qu'une répartition d'objets dans une situation de partage équitable satisfait bien aux contraintes de la situation, c'est à dire que tout a été distribué et que chacun en a autant. Ultérieurement, en fin de cycle 2, l'élève pourra vérifier que sa réponse est compatible avec ces mêmes contraintes du problème en s'appuyant sur la relecture de l'énoncé, sans recourir à une validation pratique. Puis au cours du cycle 3, les élèves pourront avoir recours à des raisonnements dans de situations où les preuves pragmatiques sont impossibles, ce qui est l'objet de cette étude.

Critères d'analyse des justifications apportées

Certains résultats produits dans le cadre de la recherche « Apprentissages numériques et argumentation au cycle 3 » ont permis de préciser les compétences des élèves du cycle 3 dans le domaine de la preuve. Les processus de preuve peuvent être analysés selon plusieurs critères (ERMEL 1999 b) :

1) La prise en compte ou non par l'élève de la nécessité de prouver. L'élève produit-il une justification à l'appui de sa réponse ? Dans ce cas, cette justification apporte-t-elle une information nouvelle ou bien est-ce simplement une affirmation redondante, par exemple : « je ne peux pas parce que c'est impossible ».

2) Le statut que l'élève accorde à ses justifications. Distingue-t-il entre la « valeur épistémique » (cf. Duval (1992-1993*)* p 39 (son adhésion à cette

proposition : évidente, absurde, vraisemblable, nécessaire, possible, neutre…) et la valeur de vérité de la proposition (vrai, faux ou indéterminé).

3) Le recours à des justifications mathématiques qui ne soient pas de simples énoncés de propriétés. Certaines justifications peuvent énoncer une propriété vraie, mais qui ne recouvre pas le cas considéré, qui n'est pas « logiquement articulée » avec la proposition soumise à la critique. Les élèves peuvent-ils distinguer entre la valeur de vérité d'une proposition et sa fonction dans un raisonnement ?

4) Les types de preuves : empirisme naïf, expérience cruciale, exemple générique, expérience mentale, présentés par Balacheff dans sa typologie.

2- LES RAISONNEMENTS

Les preuves produites par les élèves, qui constituent des observables de notre étude, font appel à des raisonnements. Nous préciserons donc différents types de raisonnements et d'autre part les compétences et difficultés des élèves liées à la mise en œuvre de ces raisonnements).

Différents types de raisonnement

En nous référant à plusieurs travaux de psychologie, J.-F. Richard (2004), G.Politzer (2002), R.M. Da Silva Neves (1994 et 2002) nous pouvons affirmer que raisonner, c'est produire des inférences. Effectuer des inférences étant produire une information qui n'était pas explicitement présente dans ces données, ou même qui en était absente. Richard distingue deux classes de raisonnements du point de vue de leur finalité : les raisonnements à visée épistémique (déductions, inductions) et les raisonnements à visée pragmatique (heuristiques, planification, programmation d'actions).

Mais comme le constate Da Silva Neves (2002 p 186-187), « les inférences inductives jouent un rôle fondamental dans la majorité de nos activités mentales. Elles sont impliquées dans les processus de formation ou d'identification de concepts, de règles, de lois ; de classification ; d'attribution de causalités ; de compréhension dans la lecture et l'interaction verbale ; dans la résolution de problèmes la formulation de tests d'hypothèses ; les processus de jugements ; la prise de décision… Il ne faudrait pas en conclure que d'autres formes d'inférences comme la déduction ou l'abduction jouent un rôle secondaire ou anecdotique dans ces activités. En situation naturelle, les différentes formes d'inférence entretiennent des relations très étroites, à tel point qu'il est parfois difficile d'identifier une pure induction ou une pure déduction ».

Les termes induction, analogie étant souvent utilisés avec des significations générales. D'après Peirce, cité par Da Silva Neves (1994 p 123) Aristote distingue quatre formes de raisonnement qui sont la déduction, l'induction, l'abduction et l'analogie ; l'analogie combinant une induction et une déduction ou une induction et une abduction. Pour Peirce la grande erreur en logique des sciences étant, de confondre l'abduction et l'induction. L'abduction suggère une hypothèse, la déduction en tire diverses conséquences que l'induction met à l'épreuve. Da Silva Neves reformule les critères classiques de démarcation entre ces différentes catégories : lorsque le cas et le résultat sont les prémisses de l'argument et la règle la conclusion, l'argument est inductif ; lorsque le résultat et la règle sont les prémisses de l'argument et le cas la conclusion, l'argument est abductif ; lorsque la règle et le cas sont les prémisses de l'argument et le résultat la conclusion, l'argument est déductif. D'après

Pierce cité par Ganascia (1989) il existe trois types d'induction, c'est-à-dire trois méthodes pour engendrer des propositions :

1- Argument négatif : nier qu'un genre général d'évènements puisse se produire parce qu'il ne s'est jamais produit

2- Vérification expérimentale d'une prédiction générale : méthode qui consiste à instaurer les conditions de la prédiction et à conclure qu'elle est vérifiée aussi souvent que l'expérimentation le vérifiera.

3- Argument fondé sur un échantillon pris au hasard : méthode pour constater quelle proportion de membres d'un classe possède une qualité pré désignée.

Notons toutefois que dans une approche centrée sur la résolution de problèmes, l'induction désigne une méthode ou une conduite heuristique, et non plus une structure logique particulière (Greco cité par Da Silva Neves, 1994). De plus les règles qui sont à la base des raisonnements ne sont pas exactement celles qu'utilise la logique classique pour définir les conditions de validité des raisonnements. Cela tient, selon Politzer, à ce que les raisonnements ne servent pas seulement à démontrer : ils servent aussi à former des hypothèses, à développer des heuristiques de recherche. Comme le précise Politzer (2002 p 16), le raisonnement comme activité mentale, le protocole verbal associé, sa traduction logique, n'ont pas toujours été clairement distingués dans l'histoire de la psychologie». L'étude expérimentale du raisonnement, selon Politzer, a en effet démarré sous l'influence d'un présupposé et d'une tradition qui l'ont orientée vers des tâches et des paradigmes à l'intérêt parfois discutable ou mal exploités. Le présupposé était que la forme logique de la prémisse est soit identique soit proche de la structure superficielle linguistique qui la véhicule ; la tradition était celle de la logique classique (ou même de la logique moderne standard).

Au niveau du Cours Moyen

Les raisonnements élaborés dans cette étude sont produits dans le cadre de la résolution de problèmes, où comme l'affirme Richard lorsqu'un sujet est confronté à un domaine inconnu, les raisonnements ne sont pas produits par des règles de déduction mais par une interprétation de la situation.

Nous avons pu constater, lors de la recherche « Apprentissages numériques et argumentation au cycle 3 » que les élèves du Cours Moyen ne rencontrent plus d'obstacles logiques internes. Ils sont capables de développer des raisonnements compatibles avec la rationalité mathématique (déductions, disjonction des cas). Ils appréhendent qu'une proposition est soit vraie, soit fausse. Il n'y a pas d'obstacle cognitif évident au raisonnement ; en particulier le principe de tiers exclu et le recours au contre-exemple semblent acquis.

3- L'ARGUMENTATION ET LES PROCESSUS DE PREUVE

La production et la critique des preuves, élaborées individuellement ou dans des échanges au sein de petits groupes, rend nécessaire le recours à des débats dont la finalité est à la fois de convaincre l'interlocuteur (un ou des élèves, toute la classe, le maître, ou soi-même) et d'établir la vérité des propositions selon des critères reconnus par la communauté que constitue la classe et compatibles avec ceux de la rationalité mathématique. Ces interactions langagières relèvent de l'argumentation. Duval (1992-1993 p 37) précise : « L'existence d'un mode de raisonnement naturel, qui ne se laisse ni décrire ni évaluer selon les critères logiques canoniques, est maintenant admise. A la suite des travaux de Perelman C. et Olbrechts-Tyteca L. (1958) et de Toulmin (1958) on le désigne par le terme argumentation. » Selon Duval (1992-1993 p 37), la prise en compte dans l'enseignement des mathématiques de l'argumentation a plusieurs origines : «D'une part, il a fallu se débarrasser de l'interdit paradoxal jeté sur le langage, dans les années 1970, dès qu'il était question d'activité mathématique et d'apprentissage mathématique. Interdit qui s'accompagnait de l'inflation verbale d'un nouveau vocabulaire ! La redécouverte de la première problématique de Piaget centrée sur le langage des enfants dans leurs conversations et leurs explications, par-delà sa seconde problématique cristallisée dans la théorie opératoire de l'intelligence et alors reçue comme une bible, a accompagné le rejet de cet interdit. D'autre part, il a fallu la résistance des faits dans les classes. Quoi qu'on fasse, on n'arrivait pas à ce que la démonstration fonctionne comme une preuve pour la plupart des élèves{…} Un autre facteur a beaucoup joué dans cette prise en compte de l'argumentation : l'extension dans les classes du travail en groupe, la mise en œuvre de formes de travail favorisant les interactions entre les élèves eux-mêmes et non plus seulement l'interaction enseignant -élève.»

Mais les relations de l'argumentation avec le raisonnement mathématique ont pu varier suivant l'évolution même des théories de l'argumentation, mais aussi de la conception de l'apprentissage en mathématiques. Aussi, il semble utile de préciser les apports théoriques permettant d'identifier ce en quoi *les fonctions de* l'argumentation sont compatibles avec le travail de validation, ce en quoi les raisonnements développés dans des argumentations peuvent contribuer aux processus de preuve et quels sont les outils permettant de les analyser et aussi quelles sont les compétences argumentatives des élèves du Cours Moyen.

3.1 Les apports des théories de l'argumentation

Nous préciserons dans un premier temps les apports pour cette étude des principales théories ; le positionnement des travaux en didactique à leur égard sera évoqué après.

Il existe une grande diversité d'approches théoriques relatives à l'argumentation dont les objets d'étude et les cadres scientifiques sont différents. Sans exposer son historique depuis son étude par Aristote, jusqu'à sa disparition progressive et provisoire au XIX$^{\text{ème}}$ siècle sous le double effet des limites de discours argumentatifs ignorant les problématiques et les apports des sciences, et du développement de la logique mathématique (cf . Plantin 2005), la renaissance de la réflexion sur l'argumentation est liée aux travaux, publiés en 1958, de Perelman C. et Olbrechts-Tyteca L. (1958) et à ceux de Stephen E. Toulmin (1958). En prenant le risque de négliger des approches plus linguistiques, la conception de l'argumentation dans cette étude tente de prendre en compte les apports de Perelman pour les finalités et le cadre de l'argumentation, de Toulmin pour les outils d'analyse des arguments, et de Grize pour le processus d'interaction.

L'auditoire universel de Perelman

Perelman redéfinit le cadre de l'argumentation. Il expose la double finalité de l'argumentation : convaincre un auditoire et établir le vrai ou le vraisemblable. Convaincre car l'argumentation s'adresse à la compréhension, à la raison ; son but n'est pas de persuader, de faire simplement agir ; en effet, pour Perelman C. et Olbrechts-Tyteca L. (1988 p 35) « pour qui est préoccupé du caractère rationnel de l'adhésion, convaincre est plus que persuader ». Pour Perelman, un critère essentiel, permettant de différencier convaincre de persuader réside dans le concept « d'auditoire universel ». Perelman pose comme principe que s'il est possible de persuader un auditoire particulier, un discours destiné à « l'auditoire universel » relève de la conviction. Dans le cas d'une argumentation conduite dans un domaine scientifique cet auditoire universel peut être constitué par la communauté scientifique concernée.

Cette conception de l'argumentation s'applique aussi en mathématiques ; les sciences étant considérées comme un cas particulier du processus argumentatif : « celui où la preuve de la vérité ou de la probabilité d'une thèse peut être administrée à l'intérieur d'un domaine formellement, scientifiquement ou techniquement circonscrit, d'un commun accord par tous les interlocuteurs. C'est alors, uniquement, que la possibilité de prouver le pour et le contre est l'indice d'une contradiction qu'il faut éliminer » (Perelman C. et Olbrechts-Tyteca L. 1988 p 61). Malgré les réserves formulées à ce concept d'auditoire universel celui-ci exprime bien le fait que l'argumentation avance et critique des raisons, qui ne sont pas seulement construites pour un auditeur particulier, mais qui visent un degré de généralisation. Selon Vannier (2001 p 9), ce qu'il appelle la rhétorique de Perelman C. est constituée par la réunion de trois éléments essentiels : la formulation langagière de notre compréhension, la présence d'une justification, la recherche d'une reconnaissance sociale de cette justification.

Pour nous l'argumentation vise à atteindre deux buts : convaincre un interlocuteur et établir le vrai ou le vraisemblable.

Un autre apport essentiel est constitué par le recensement des procédés argumentatifs que proposent Perelman C. et Olbrechts-Tyteca L. dans le *Traité de l'argumentation*. Cette « somme » constitue un outil de référence, rappelant la diversité des procédés argumentatifs. Le risque de réduire une argumentation à un schéma unique se heurte au rappel de cet inventaire. Le fondement humaniste du *Traité de l'argumentation* donne une perspective sociale aux débats conduits dans la classe. Le statut de l'auditoire universel auquel il fait appel, qui est plus large que celui de la classe, intervient aussi comme cadre référent de la rationalité. La multiplicité des références évoquées, l'analyse fine des arguments, la prise en compte de l'interlocuteur caractérisent ce projet visant à restaurer la place du rationnel dans les conduites humaines.

Le cadre de Toulmin

Pour Toulmin, le discours argumentatif est organisé sur un mode ternaire permettant le passage de données à une conclusion sous le contrôle le plus souvent implicite d'une "licence d'inférer" (ce schéma peut être augmenté d'indicateurs de force ou de restriction permettant de prendre en compte une incertitude possible sur l'inférence). Toulmin (1993 p 128) caractérise l'argumentation par un agencement des arguments selon un schéma général souvent utilisé depuis : on peut inférer une conclusion C de données D en fonction d'une garantie G, elle même justifiée par un fondement F :

D	->	Donc Q,	C
	Vu que G	Sauf si R	
	En vertu de F		

D : données ; C : conclusions ; G : garantie ; F : fondement ; Q : qualificateur (force de la garantie) ; R : restriction.

Le recours aux schémas d'argumentation de Toulmin permet de caractériser les enchaînements, en particulier l'explicitation des garanties et des fondements, et de repérer les changements s'opérant dans la nature des justifications produites. Cette modélisation de l'argumentation de Toulmin a été souvent utilisée en didactique des mathématiques, compte tenu aussi de sa proximité avec une schématisation de la démonstration.

La conception de Grize

Considérer qu'une argumentation constitue une co-élaboration, une co-construction de points de vue en constitution et non une « dispute », une confrontation d'opinions déjà stabilisées qu'il s'agirait de défendre, où chacun s'appuie sur des justifications bien éprouvées et organisées est une conception partagée par de nombreux travaux en didactique relatifs à l'apprentissage de la langue (Isidore-Prigent J., Plane S., Rrebière M. 2004, p 23 - 39) qui font référence aux travaux de Grize (1982, 1989, 1990) et à sa conception de l'argumentation comme l'adhésion à une schématisation. Pour Grize (1990 p 38), le locuteur construit une représentation devant un autre locuteur qui reconstruit la schématisation qui lui est proposée. Grize utilise dans sa formalisation d'une logique naturelle trois plans de schématisation en citant M.J. Borel (1984 p 14) : cognitif, où est schématisée l'information proprement dite, argumentatif sur lequel on conclut, évalue… et rhétorique qui indique toujours quelque chose du circuit de communication dans lequel il s'insère. Cette conception de l'argumentation correspond en particulier à tous les cas où les élèves élaborent ensemble une solution que celle-ci soit une production originale, dont la genèse s'appuie sur des schématisations ou un jugement sur une production. Nous ne chercherons pas, par contre, à établir un lien spécifique entre la conception de la « logique naturelle » de Grize et les raisonnements produits par les élèves.

En résumé

Le caractère à la fois public et rationnel des processus de preuve étudiés délimite les argumentations analysées dans cette étude. L'argumentation produit et critique des raisons, qui ne sont pas seulement construites pour un auditeur particulier, mais qui visent un degré de généralisation, selon des critères communs relevant d'un champ disciplinaire. Ces critères, rationnels et produits ou acceptés avec un contrôle collectif, peuvent être l'objet même de l'apprentissage.

3.2 L'argumentation dans des travaux de didactique des mathématiques

La conception de l'argumentation, ses relations avec la démonstration, ainsi que la question de l'existence d'une argumentation mathématique ont fait l'objet de nombreux travaux en didactique des mathématiques.

Des débats ont été initiés sur ce thème dans la communauté didactique notamment à partir de 1999 par Balacheff. La diffusion des travaux sur l'argumentation évoqués précédemment a aussi amené une évolution. Dans les recherches en didactique des mathématiques, il peut être utile de distinguer les travaux relevant du début des années 90 de ceux parus ces six dernières années.

Comme nous l'avons rappelé, les critères d'acception d'une argumentation sont déjà posés par Balacheff en 1988 (p 41), « un indicateur significatif [de ces processus de différenciation et d'identification des objets de pensée et de leurs relations] est la prise de distance avec le "discours argumentatif naturel" pour élaborer un "discours argumentatif formel" ». Balacheff (1988 p 27) constate par ailleurs que « les verbes expliquer, prouver, démontrer sont souvent considérés comme synonymes dans la pratique de l'enseignement des mathématiques ».

Les travaux de Duval

Dans de nombreux textes R.Duval (1990, 1991, 1995, et aussi avec M.A Egret : 1989, 1993) analyse les relations entre explication, argumentation et démonstration. Duval (1992-1993 p 42) précise que « ce qui distingue le raisonnement et l'explication c'est que le premier a pour but de modifier la valeur épistémique d'un énoncé-cible, et la détermination de sa valeur de vérité lorsque des conditions particulières d'organisation sont remplies, mais non la seconde. L'explication n'a pas pour but de modifier la valeur épistémique d'un énoncé cible : elle ne s'appuie pas du tout sur les valeurs épistémiques des propositions mobilisées mais seulement sur leur contenu. De ce point de vue l'argumentation apparaît comme une démarche qui s'apparente plus à celle mise en œuvre dans une démonstration qu'à celle mise en œuvre dans une explication ».

Produire des raisons, les examiner, les soumettre à la critique, relève bien de l'argumentation. Toutefois la structure de celle-ci est différente de celle du raisonnement démonstratif. Ces différences ont été exposées par Duval dans plusieurs publications, il souligne que le raisonnement déductif s'exprime linguistiquement dans des formes et avec des connecteurs assez proches de ceux utilisés dans l'argumentation. Les différences entre démonstration et argumentation portent notamment, selon lui, sur l'organisation du champ concerné, sur le statut des propositions et les critères de validité des raisonnements. Dans un « pas » de démonstration, les propositions ont un statut théorique (hypothèses, théorème, définition…) et un statut opératoire (prémisses, énoncé tiers, conclusion). Les prémisses ne peuvent être que des hypothèses données au départ ou des conclusions obtenues dans un pas antérieur. Les énoncés tiers ne peuvent être pris que dans un corpus déterminé de définitions et de théorèmes déjà construit théoriquement.

Pour Duval, dans les écrits de cette période, les structures de l'argumentation et de la démonstration sont différentes et le passage de l'une à l'autre constitue une rupture.

La possibilité d'une argumentation mathématique est néanmoins affirmée par Duval (1992-1993 p 52) : « En mathématiques, on peut argumenter en s'appuyant sur un corpus de définitions et de théorèmes bien établis {…} ils doivent être utilisés comme des énoncés tiers selon la règle de détachement. Autrement dit, une argumentation heuristique doit comporter des "sous-programmes" de raisonnement valide, même si on ne sait pas encore relier ces différents sous-programmes pour arriver à un arbre déductif complet qui corresponde à la démonstration ».

Pour Duval, il y a une différence entre l'argumentation rhétorique, conduite pour convaincre l'interlocuteur ou soi-même et l'argumentation heuristique (par exemple celle mise en œuvre en mathématique) développée dans les phases de recherche à l'intérieur d'un champ de connaissances particulier, conduite pour progresser dans un problème. Toute argumentation cherche à atteindre simultanément ces deux types d'objectifs, leur différence est ailleurs : l'existence ou l'absence d'une organisation théorique du champ de connaissances et de représentations dans lequel se déroule l'argumentation.

Le terme « heuristique » peut aussi concerner l'élaboration de justifications, de preuves ou leur critique et non seulement la production d'un résultat. Le mot

« rhétorique » peut prendre plusieurs significations allant de la prise en compte d'autrui dans la mise en forme des arguments à l'expression de processus de persuasion relevant de formes de style plus que de la raison. Mais, comme dans la plupart des travaux en didactique des mathématiques, nous nous intéressons à des argumentations dont la dimension heuristique est principale, que cette heuristique vise l'élaboration de solutions ou, plus particulièrement dans cette étude, l'élaboration de preuves.

L'évolution récente

Depuis ces dernières années, un rôle plus important est reconnu aux débats dans les apprentissages. Par ailleurs les développements des théories de l'argumentation[5] ainsi que la production en didactique du français d'outils d'analyse des interactions langagières fournissent de nouvelles perspectives. En didactique des mathématiques, notamment sous l'impulsion de Balacheff, la conception de l'argumentation a fait l'objet de débats dans le cadre de la « Lettre de la preuve ».[6]

En partant du constat que tout discours en mathématique qui vise à établir la validité d'un énoncé ne peut avoir les caractéristiques d'une démonstration, la question se pose de l'existence d'une argumentation en mathématique ou d'une argumentation mathématique. S'il n'y a pas, pour Balacheff, d'argumentation mathématique, au sens souvent suggéré d'une pratique argumentative en mathématiques qui se caractériserait par le fait qu'elle échapperait aux contraintes qui pèsent sur la démonstration, il existe pourtant une argumentation en mathématiques. L'argumentation n'est plus considérée comme un raisonnement en rupture avec les raisonnements mathématiques.

Il précise que la résolution de problèmes est le lieu où peuvent se développer des pratiques argumentatives reprenant des moyens opérationnels utilisés ailleurs (métaphore, analogie, abduction, induction, etc.) qui s'effaceront lors de la construction du discours qui seul sera acceptable au regard des règles propres aux mathématiques. Pour Balacheff (1999), l'argumentation est à la conjecture ce que la démonstration est au théorème : « une conséquence que certains jugeront catastrophique est que comme la résolution de problème, l'argumentation sera rebelle à toute tentative d'enseignement direct (bien sûr, je ne confonds pas ici apprentissage de l'argumentation et apprentissage de la rhétorique) ».

Dans le cadre de ces débats, Paul Cobb, cité par Balacheff (1999) qui relance le questionnement sur l'argumentation (« L'argumentation est-elle un obstacle ? Invitation à un débat... »), suggère la possibilité d'une argumentation mathématique à laquelle les élèves accèderaient par la pratique de discussions réglées par des normes socio-mathématiques qui émergeraient des interactions entre l'enseignant et les élèves, l'enseignant étant regardé comme un représentant de la communauté mathématique. Balacheff (1999) précise : « ce mouvement vers la rationalité mathématique ne peut être accompli qu'en prenant effectivement conscience de la nature de la validation dans cette discipline, il provoquera la double construction de l'argumentation et de la démonstration. »

Le point fort qui sépare l'argumentation et la démonstration est la nécessité pour cette dernière d'exister relativement à une axiomatique explicite.

[5] Cf. par exemple, Plantin (2005) déjà cité ainsi que « L'argumentation aujourd'hui : Positions théoriques en confrontation » avec les contributions de Grize, Plantin, Vignaux,…(2004, Doury M. et Moirand S.), et aussi le chapitre III sur les recherches contemporaines en argumentation et rhétorique dans Breton P., Gauthier G. (2000).

[6] www.lettredelapreuve.it

Les rapports aux théories de l'argumentation

L'interprétation dont a fait l'objet Perelman, même dans certains travaux de didactique est parfois réduite à une conception de l'argumentation qui ne viserait que la persuasion et ne se serait intéressée qu'aux processus permettant d'obtenir l'adhésion d'un auditoire, en omettant de rappeler que chez Perelman l'auditoire visé est l'auditoire universel.

La référence à Toulmin concerne la structure de l'argumentation en données, conclusions, garanties et fondements qui est assez proche de la structure d'une déduction (valide ou non) et est mise en valeur par des schémas. Elle permet de faire une analogie entre des « pas » d'argumentation et des « pas » de démonstration, comme le précise Pedemonte (2002 p5) « Modéliser une argumentation comme une chaîne de pas argumentatifs, chacun pouvant être comparé avec les pas correspondants de la démonstration ».

Mais comme l'indique Balacheff (1999) : « la référence à l'une ou l'autre de ces conceptions de l'argumentation est susceptible de nous faire adopter une position différente quant à ce que peut représenter l'argumentation dans la pratique des mathématiques, notamment avec une visée d'enseignement et en relation avec la démonstration. En se plaçant dans la suite de Toulmin il paraît possible d'envisager une solution de continuité de l'argumentation à la démonstration, et pourquoi pas de considérer la démonstration comme un genre argumentatif particulier ».

Cependant le risque existe en se référant aux seules approches de Toulmin de réduire l'argumentation produite par les élèves en mathématiques aux raisonnements dont la forme est déjà très proche de celle de la démonstration. Peut-on sans le trahir citer ici Guy Brousseau (2004) : « Beaucoup de professeurs de mathématiques ont tendance à en déduire que, puisque les raisonnements mathématiques sont les seuls moyens d'établir publiquement la vérité d'un énoncé mathématique, ces raisonnements doivent nécessairement décrire aussi (ou servir de modèle pour décrire) la pensée qui construit correctement les mathématiques, donc *qui décrivent* la pensée des mathématiciens et des élèves. Il en résulte qu'ils veulent enseigner à penser, puis à raisonner directement comme on démontre. Et qu'ils confondent l'activité et le raisonnement mathématiques des élèves avec son produit culturel : le moyen standard de sa communication. ». Ce souci est partagé par Pedemonte (2002 p 2) : « pour qui l'accès authentique à une problématique de la vérité et de la preuve se situe dans l'argumentation ».

Les critères permettant de définir l'existence d'une argumentation en mathématiques portent sur la nature du raisonnement associant la proposition et sa justification et non la forme de cet étayage. Il est donc nécessaire de distinguer plusieurs aspects : forme du discours (pouvant présenter une certaine subjectivité : personnalisation…), types du raisonnement, normes acceptées dans la classe. Si comme le précise Balacheff le point fort qui sépare l'argumentation et la démonstration est la nécessité pour cette dernière d'exister relativement à une axiomatique explicite, la possibilité existe de développer des argumentations valides selon les conditions évoquées.

Argumentation et processus de preuve au primaire

On peut d'abord constater que tous les échanges oraux, menés lors d'une situation d'apprentissage en mathématiques, ne constituent pas des débats argumentatifs. Certains ont pour but, par exemple, l'analyse du problème, l'explicitation d'une méthode, sans qu'il y ait nécessairement production et critique d'arguments. Ils peuvent par exemple relever de la description d'une procédure.

Un second constat est que toutes les phases d'argumentation menées lors de séquences de mathématiques ne sont pas des phases de preuve : il ne s'agit pas toujours d'établir qu'une proposition est vraie ou fausse. Dans certains cas le débat peut porter, par exemple, sur des caractéristiques d'une méthode, son efficacité, sa fiabilité.

Les débats argumentatifs analysés dans notre étude cherchent principalement à se situer dans le premier cas : ils ont pour objet d'établir la valeur de vérité d'une proposition. Dans ce cas, les propositions mathématiques (émises par un sujet) ont, comme le précise Duval :

- un statut (affirmation, hypothèse, …) ;
- une valeur épistémique (un degré de crédibilité aux yeux du sujet : évidente, absurde, vraisemblable, nécessaire, possible, neutre…) ;
- une valeur de vérité (vrai, faux ou indéterminé).

4. LES PROBLÈMES ET LES SITUATIONS

En 1987 Balacheff écrivait (p172): « Le fait qu'une explication constitue une preuve peut faire l'objet d'un consensus dans la classe mais cela est insuffisant, l'enseignant doit s'assurer que ce consensus se réalise sur des bases acceptables » et il ajoutait « notre problème est actuellement celui de la détermination des variables didactiques dont la manipulation permette un tel contrôle, et par ailleurs d'analyser la nature et les voies d'un contrat didactique qui permettrait les ingérences de l'enseignant dans un processus de décision initialement dévolu aux élèves ».

4.1- La notion de problème

Une analyse de la tâche de l'élève

La notion de problème est utilisée dans différents sens dans l'enseignement des mathématiques. Richard précise qu'on se trouve dans une situation de résolution de problème si n'existent pas en mémoire les connaissances nécessaires à l'élaboration d'une procédure acceptable : soit les connaissances qui concernent les prérequis de l'action, soit les connaissances qui permettent de faire les inférences nécessaires à l'ordonnancement des actions. Pour sa part, Gérard Vergnaud (1991 p 136) formule aussi une distinction entre :

> « 1) des classes de situations, pour lesquelles le sujet dispose dans son répertoire, à un moment donné de son développement et sous certaines circonstances, des compétences nécessaires au traitement relativement immédiat de la situation.
>
> 2) des classes de situations pour lesquelles le sujet ne dispose pas de toutes les compétences nécessaires, ce qui l'oblige à un temps de réflexion et d'exploration, à des hésitations, à des tentatives avortées, et le conduit éventuellement à la réussite, éventuellement à l'échec. »

Deux cas peuvent être identifiés selon que l'élève dispose ou non d'un modèle de résolution. Si c'est le cas, il peut dans un premier temps identifier un modèle de résolution qu'il est censé connaître puis effectuer le traitement choisi. Dans ce cas, le processus de résolution n'oblige pas l'élève à vérifier ses résultats ou sa méthode : il peut être persuadé d'avoir choisi un moyen lui permettant de résoudre l'ensemble du problème. Le contrôle relève souvent d'une demande complémentaire de l'enseignant.

Lorsque l'élève est confronté à un problème, il ne peut procéder de la même façon, sauf en appliquant à tort un modèle inapproprié à la situation. Ne reconnaissant pas la situation comme une de celles pour lesquelles il dispose d'un modèle de résolution qui lui a été enseigné, l'élève doit gérer en même temps plusieurs tâches. Il lui faut élaborer une ou plusieurs procédures de résolution (faire des essais, formuler des hypothèses…), comparer ses résultats au but à atteindre, et donc contrôler ainsi ses procédures. Il doit donc mener en même temps des tâches de résolution et des tâches de contrôle. La confrontation entre les résultats produits et les buts visés entraîne des ajustements, des réorientations ou une mise en cause de la méthode choisie et peut inciter à une recherche dans une nouvelle direction. Le contrôle est intrinsèque à la situation.

Nous nous situons dans le cas où l'élève ne dispose pas d'un modèle de résolution qu'il aurait appris préalablement. Et, d'autre part, nous cherchons à permettre l'élaboration par les élèves de procédures de preuve dont la justification ne réside pas dans le simple énoncé de propriétés censées être connues, mais qui supposent aussi une réelle élaboration par l'élève et la mise en œuvre de situations appropriées.

4.2 Les situations de preuve

L'appréhension par les élèves de processus de preuve et de règles pour établir la validité d'une proposition suppose de construire des situations adéquates. Nous avons vu que ces situations doivent constituer des problèmes.

Au sens de la théorie des situations didactiques ces situations doivent être des situations adidactiques: «du point de vue de l'élève, la situation est adidactique, seulement s'il a conscience d'y engager uniquement un raisonnement mathématique » précise Margolinas (1993 p 36). Une situation adidactique est elle même plongée dans une situation didactique puisque celle-ci se compose « d'une situation adidactique dans laquelle le maître n'intervient pas au niveau des connaissances et des savoirs et d'un contrat didactique dans lequel elle est plongée » précisent M.-J. Perrin-Glorian et M. Hersant (2003). De plus ces situations relèvent des situations de validation qui sont caractérisées par un enjeu explicite de vérité des affirmations selon Margolinas (1993 p 31) qui distingue, au sein des phases de conclusion, la phase de validation où l'élève est l'acteur principal d'une phase d'évaluation : « Nous dirons que la phase de conclusion est une phase d'évaluation quand, dans cette phase, la validité du travail de l'élève est évaluée par le maître sous la forme d'un jugement sans appel… Nous dirons que la phase de conclusion est une phase de validation si l'élève y décide lui-même de la validité de son travail ». La situation de validation est selon Brousseau (1986) cité par Margolinas (1993 p 78) une organisation spécifique du milieu de manière à ce que « les messages échangés avec le milieu soient des assertions, des théorèmes, des démonstrations, émises et reçues comme telles » . Perrin-Glorian (1999 p 285) précise « En théorie des situations didactiques, le milieu est le système antagoniste du sujet : le milieu adidactique est un système dénué d'intentions didactiques, extérieur au sujet, qui, par ses rétroactions aux actions du sujet, permet une réflexion du sujet sur ses actions et, par là, un apprentissage ».

Les processus de preuve peuvent intervenir dans deux types de situations, selon Balacheff (1988 p 35) :

- des situations de preuve : l'objectif est la production d'une preuve (de la vérité ou de la fausseté) d'un énoncé. Cette situation contient organiquement la contrainte de mise en œuvre de processus de validation.
- des situations de décision : elles demandent la mise en œuvre d'un processus de validation sans que pour autant soit exigée la production explicite de preuves. C'est une proposition vraie et non la preuve de cette proposition qui doit être produite. La production d'une preuve n'y est pas exigée explicitement, mais le recours au débat permet de transformer ces dernières situations en situations de validation.

La prise de conscience par l'élève d'une contradiction et son dépassement suppose selon Balacheff (1988 p 71) une prédiction, c'est à dire l'engagement effectif de l'élève sur une affirmation, l'existence potentielle de l'affirmation ne suffit pas, donc l'existence d'un attendu : prédiction ou anticipation et la possibilité de construire l'affirmation associée à cet attendu et sa négation.

De plus notre analyse porte sur un ensemble de situations, et non une situation isolée, qui constituent une progression destinée à être utilisée par des enseignants de façon autonome. Les situations doivent donc présenter une relative fiabilité. Cette « robustesse » des situations tient dans la capacité :

- d'obtenir les productions attendues lors des différentes phases
- de permettre à l'enseignant d'intervenir au cours de la séance et de faire des choix en maintenant l'activité mathématique prévue dans la situation.

L'élaboration des jugements dans les apprentissages mathématiques met en évidence des processus de preuve qui sont critiqués collectivement, le maître étant garant des conclusions. Le travail de preuve comporte donc à la fois la formulation de propositions personnelles qui deviennent publiques, la constitution progressive de critères de preuve et l'établissement de la vérité selon ces critères.

Le rôle du professeur

Les situations de preuve abordées dans cette étude constituent des phases de validation où la charge de la preuve est, dans les projets, dévolue aux élèves. Le rôle de l'enseignant est donc particulièrement complexe. Il doit assurer cette dévolution et il est le garant des critères de preuve admis ou partagés par les élèves. Si ce paradoxe existe dans d'autres champs des mathématiques, il est d'autant plus crucial ici, car aucun savoir ne sera institutionnalisé et ce que les élèves comprennent des règles pour établir le vrai ou le faux est fonction de ce qui est valorisé par l'enseignant.

En effet, comme l'affirme Balacheff (1988 p 462) « la "vérité" devient problématique non parce que le professeur ne décide pas, mais parce qu'il atteste qu'il est prêt à soutenir ou à donner un statut à la thèse et à l'antithèse. Il donne en quelque sorte un statut à l'incertitude, et dans le même temps marque l'intérêt qu'il y aurait à "savoir". Ceci assure que l'énoncé n'est pas une simple spéculation mais bien une conjecture ».

5 CONCLUSIONS

Ces éléments de références théoriques, cherchant à présenter de façon non exhaustive les problématiques de recherche et les travaux qui ont pu éclairer les questionnements présentés dans cette étude, seront développés sur certains points concernant la résolution de problèmes, les situations didactiques ou les mises en commun dans certains des chapitres suivants.

L'hypothèse de cette étude est que les élèves du cycle 3 peuvent développer des processus de preuve compatibles avec les exigences de la rationalité mathématique, au moyen de débats argumentatifs, sous certaines conditions portant sur les situations et sur leur gestion par le maître, conditions qu'il s'agit de préciser.

Cette analyse des processus de preuve et des conditions des situations didactiques adaptées, suppose :

1) Une explicitation des choix effectués :
- des problèmes numériques qui sont proposés et de leurs enjeux de preuve.
- des situations didactiques expérimentées.

2) Une étude des preuves réellement développées par les élèves.

A partir de ces résultats expérimentaux, nous avons commencé à explorer le champ des problèmes possibles, pour structurer une classification des problèmes susceptible d'expliciter les relations existant entre ces problèmes, les problèmes de preuve articulés sur des problèmes de recherche qui peuvent se situer dans un champ plus vaste de problèmes arithmétiques.

Chapitre 2
ANALYSE DES SITUATIONS DE PREUVE PROPOSEES

1- QUELS PROBLEMES DE PREUVE ?

1.1 Objet du chapitre

Une hypothèse de cette étude est que les élèves du Cours Moyen peuvent produire des preuves compatibles avec les exigences de la rationalité mathématique, sous certaines conditions concernant les problèmes proposés, la structuration des situations didactiques et leur mise en œuvre.

Dans ce chapitre, les problèmes choisis et leurs procédures de résolution sont présentés en premier, puis les preuves attendues. Les caractéristiques communes des situations didactiques, dont celles relatives à la structuration de débats sont ensuite explicitées. Les résultats expérimentaux obtenus seront analysés dans le chapitre suivant.

1.2 Types de problèmes

Une première condition est que la tâche proposée aux élèves relève de la résolution de problèmes : les élèves doivent élaborer des procédures de résolution, dont ils auront à justifier de la validité. Ils ne disposent pas d'un modèle de résolution qui leur aurait été enseigné auparavant. Aussi, comme nous l'avons vu au chapitre 1, il est nécessaire que le problème ne soit pas un de ceux que les élèves sont censés avoir appris à résoudre et pour lesquels ils disposent d'un modèle expert connu ; dans ce cas, en effet, la validation repose non sur des preuves élaborées, mais sur des justifications de l'adéquation du modèle à la situation.

Afin qu'il n'y ait pas de confusion, non plus, avec des problèmes sollicitant des connaissances en cours d'apprentissage, nous avons préféré écarter, sauf au début du CM1, des problèmes dont le modèle expert serait la division posée ; celle-ci devenant au cours du CM1 un objet d'enseignement.

Pour la même raison, nous n'avons retenu que des problèmes ne faisant intervenir que des nombres entiers car l'étude des fractions et des décimaux au CM aurait risqué de valoriser des méthodes en cours d'acquisition : celles qui auraient pu être reconnues par certains élèves comme étant visées par cet enseignement, car déjà débattues, critiquées voire institutionnalisées et donc d'interférer avec l'élaboration de procédures plus personnelles.

Ces choix sont pragmatiques afin de ne pas mettre en valeur des procédures que seuls quelques élèves auraient déjà pu acquérir, et qui réduiraient le débat à l'expression des seuls élèves dont la compétence en mathématiques est reconnue.

Les problèmes numériques choisis sont :

a) des problèmes de recherche de toutes les possibilités ;
b) des problèmes à deux contraintes ;
c) des problèmes d'optimisation ;
d) des problèmes de dénombrement.

Les élèves ont à prouver, selon les problèmes :

- l'impossibilité d'une solution pour certaine(s) valeur(s) des données ;
- l'unicité d'une solution pour certaine(s) valeur(s) des données ;
- l'exhaustivité des solutions ;
- l'optimalité d'une solution.

Pour les deux derniers cas, cette preuve peut porter sur des valeurs particulières des données ou sur la validité d'une conjecture numérique générale.

1.3 L'insertion de ces situations dans un ensemble visant à apprendre à chercher

Les problèmes étudiés ont été construits dans le cadre de la recherche ERMEL « Apprentissages numériques et argumentation au cycle 3 ». La fonction de ces problèmes est double : développer des stratégies de recherche et permettre aux élèves de produire des preuves qui ne se limitent pas à de simples constats basés sur l'évidence, mais constituent des enjeux suffisants pour la production et la critique de raisonnements.

Ces problèmes ne visent pas un apprentissage mathématique notionnel : aucune institutionnalisation de notions n'est effectuée. Si les connaissances des élèves sont bien évidemment sollicitées, il n'y a pas non plus de référence possible à un enseignement plus ou moins récent dont il serait nécessaire de se souvenir. L'intérêt de ces situations réside aussi dans la plus grande latitude laissée à l'élaboration des démarches de résolution : l'élève sait qu'il est confronté à une situation inédite et qu'il ne s'agit pas pour lui d'adapter un modèle mathématique qu'il aurait déjà rencontré.

Ces situations avaient pour but de permettre à l'élève d'« élaborer une démarche originale, dans un problème de recherche, c'est à dire un problème pour lequel l'élève ne dispose d'aucune solution déjà éprouvée »[7] . Plus particulièrement, il s'agissait de lui permettre de :

- gérer des procédures par essais successifs : ce sont des procédures où l'élève identifie ce qui varie d'un essai à l'autre. Cela implique, pour l'élève, d'améliorer la gestion des procédures par essais de calculs successifs, de garder la trace des essais, de les relire, d'en identifier les variations, d'anticiper des ajustements au voisinage du but, de vérifier que les solutions sont compatibles avec les contraintes de l'énoncé ;
- s'organiser pour produire les solutions dans des problèmes de recherche de tous les possibles, comparer les solutions, contrôler que l'on a toutes les solutions ;
- formuler des conjectures, émettre des hypothèses ;
- prendre en charge la validation des résultats produits, établir la preuve d'une proposition. [8]

Le but n'était pas de réinvestir, d'un problème à l'autre, des solutions locales déjà éprouvées, ce que garantit la diversité des problèmes proposés, mais de développer et de faire évoluer des procédures par essais, vers l'élaboration de conjectures.

Dans ce type de problèmes, toutes les informations nécessaires à la compréhension du problème sont présentes dans l'énoncé et directement utilisables. L'énoncé est relativement court. Il s'agit de « problèmes de recherche » et non de problèmes d'application ou de « problèmes complexes » souvent proposés à l'école

[7] cf. programmes de 1995
[8] cf ERMEL (1997) et ERMEL (1999 a) chapitres « Des problèmes pour apprendre à chercher »

élémentaire dont le but est plutôt la compréhension des énoncés, le tri ou la recherche d'informations ou de questions, mais dont le modèle de résolution est connu par les élèves et est à identifier.

Les apprentissages visés ne peuvent être atteints par une simple fréquentation épisodique : il ne suffit pas de présenter simplement une ou deux situations isolées, pour mettre en place des conditions favorables à un apprentissage. Il nous semble nécessaire, au contraire, de construire aussi dans ce domaine de véritables progressions, donnant l'occasion aux élèves de réutiliser les méthodes appréhendées dans d'autres situations.

Ces situations relèvent d'un même « macro-contrat » (Perrin-Glorian M-J et Hersant M. 2003), qui concerne cet objectif d'enseignement, apparaissant dans ces situations de recherche et concernant aussi les situations de preuve qui leur succèdent.

D'autres situations que celles expérimentées peuvent contribuer à cet apprentissage, en particulier, dans des débats lors des mises en commun. Mais les situations analysées dans cette étude se différencient parce que le processus de preuve fait l'objet d'un déroulement spécifique : l'existence d'un problème de preuve et la production de solutions par chaque élève et d'autre part les connaissances pouvant être sollicitées ne font pas l'objet d'une institutionnalisation. Les problèmes posés, les connaissances sollicitées, ne sont pas les mêmes dans chacune des situations décrites.

2 - ANALYSE DES SITUATIONS

Les situations de preuve sont présentées suivant le type des problèmes de recherche proposés. Pour chacune l'analyse porte sur :

- le problème proposé et les variables de la situation, les procédures de résolution attendues et les difficultés liées à leur mise en œuvre ;
- les procédures de preuve visées pour chaque problème de preuve et les apprentissages visés dans le domaine de la preuve.

2.1 Problèmes de recherche de toutes les possibilités

a) Problème proposé : Golf

Le problème choisi propose d'atteindre un nombre c en ajoutant un multiple de a et un multiple de b (a,b,c, étant des entiers positifs). Le modèle mathématique est celui d'une équation ($ax + by = c$) à deux inconnues. Le nombre de solutions est fini : x et y sont aussi des nombres entiers positifs dans les contextes proposés.

Un premier problème propose la recherche d'une solution, sans viser l'exhaustivité ; il a pour but de permettre à l'élève d'appréhender les contraintes de la situation et le but à atteindre (avec par exemple ici, $a= 8$, $b=3$ et $c= 41$).

Un problème de preuve est proposé ensuite pour de nouvelles valeurs de c, en gardant les mêmes valeurs pour a et b, l'élève doit chercher toutes les possibilités pour une autre valeur de c (ici $c = 97$) et prouver que toutes les solutions ont été produites. Une reprise pourra avoir lieu dans certaines classes avec des valeurs différentes de ces variables numériques.

b) Variables didactiques

L'existence, le nombre des solutions, ainsi que la plus ou moins grande facilité des calculs constituent les principales variables de la situation.

1) L'existence d'une solution :

Le problème de preuve proposé porte sur la recherche de toutes les solutions, et non sur celle des conditions d'existence d'une solution ou de l'impossibilité de produire une solution entière. Aussi les valeurs de la variable ont été choisies pour permettre l'existence de solutions.

Lorsque x et y appartiennent à l'ensemble des nombres relatifs, le problème admet une solution si c est un multiple du pgcd de a et de b (en application du théorème de Bézout : il existe x et y tels que $ax + by = 1$ si et seulement si a et b sont premiers entre eux).

Dans nos expérimentations, menées uniquement avec des nombres entiers naturels, nous ne nous sommes intéressés qu'au cas où a et b sont premiers entre eux, pour ne pas être dépendants des connaissances sur les multiples d'un nombre et plus particulièrement sur les relations de divisibilité en constitution qui forment, en tant que telles, un champ d'étude à part entière. Par ailleurs, choisir a et b non premiers entre eux (par exemple $a= 4$ e*t* $b = 6$) aurait complexifié les calculs pour les élèves, sans que cela ne présente d'intérêt par rapport aux problèmes de preuve proposés, puisque nous ne cherchions pas, dans ce problème, à prouver l'impossibilité ou les conditions d'existence de solutions.

Lorsque x et y appartiennent aussi à l'ensemble des nombres entiers naturels ce problème admet un nombre fini de solutions, sous les mêmes conditions, sauf pour quelques entiers c inférieurs au produit de a et de b.

2) Le nombre de solutions :

La recherche de toutes les solutions présente un intérêt si leur production offre une certaine résistance. Celle-ci est liée au nombre de solutions et à la complexité du calcul. Dans cette expérimentation, pour les problèmes successifs proposés, le nombre de solutions est (pour a égal à 3, et b à 8) :

- deux solutions pour $c = 41$: 3x3 + 8x4 et 3x11 + 8x1
- quatre solutions pour le problème de preuve avec c =97 : 3x3 + 8x11 ; 3x11 + 8x8 ; 3x19 + 8x5; 3x27 + 8x2.

3) Les relations entre les données :

- si les nombres a et b sont égaux à 2 ou à 5, l'appui sur 10 et les multiples de 10 est possible et facilite les calculs. Ceci est notamment le cas lors de la référence à la monnaie (par exemple chercher toutes les façons de faire une somme avec des pièces de 5F et de 2 F) ;
- la grandeur relative des nombres : par exemple pour 8 et 3, un sous but peut être d'approcher 41 ou 97 avec des 8 (ici l'approche avec les b est encore plus économique car 2xa < b)

c) Procédures de résolution :

Nous étudierons les procédures relatives à la production d'une solution puis celles relatives à la production de plusieurs solutions.

1) Production d'une solution

Les principales procédures sont :

- Le recours à des procédures par cumul pour atteindre *c* :
  - ajouter des *a* et des *b* en ajustant au voisinage de *c*. La réussite de cet ajustement est en partie liée à la prise en compte de l'écart entre le résultat produit et le but à atteindre soit avant d'atteindre *c* pour pouvoir choisir les derniers nombres (cela suppose que l'élève fasse des bilans au cours de la résolution), soit après avoir dépassé *c* en déterminant combien il peut enlever de *a* ou de *b* pour atteindre ce nombre ;
  - l'élève peut aussi soustraire des *a* ou des *b* pour essayer d'atteindre zéro ou un multiple de l'autre nombre. Par exemple pour *c* = 41, 41-3 = 38 ; 38-3 = 35 ; 35-3 = 32, 32 pouvant être reconnu comme étant un multiple de 8.

Ces deux catégories de procédures sont basées sur un cumul additif ou des soustractions successives. Elles ne permettent pas de produire directement le nombre de 3 et le nombre de 8 : atteindre *c* n'est pas suffisant, l'élève doit ensuite recompter le nombre de *a* et de *b* pour formuler sa réponse. Il y a un dédoublement des tâches : atteindre *c*, puis établir les valeurs de *x* et de *y* pour formuler une réponse.

L'élève peut aussi utiliser les propriétés de la numération décimale pour se ramener à un sous-problème avec des dizaines entières multiples de *a* ou de *b*, par exemple à partir de 3+8 = 11 ou de 41-3 = 38 et 38-8 = 30, ou décomposer directement 41 en 30 +11 et utiliser 30 = 3x10.

- La production des essais de sommes de multiples de *a* et de *b*.

Ces procédures par essais présentent l'avantage d'exprimer directement les valeurs *x* et *y*, plutôt que de les recompter à chaque fois dans les écritures additives déjà produites, comme dans les cas précédents. Sans même recourir à la division, la connaissance des tables peut permettre de produire 41 comme 32+9 = 4x8 + 3x3.

- La division de c par *a* ou *b*.

Ces procédures peuvent apparaître, une fois que l'étude de la division a commencé, en particulier celles visant à atteindre c en le divisant par le plus grand des deux nombres *a* et *b* et à procéder ensuite par ajustements.

Dans tous les cas précédents, les solutions produites sont validées par la vérification des contraintes : le total est correct et est obtenu sans ajouter d'autres nombres que des *a* et des *b*.

2) Production de toutes les solutions

Pour certains élèves, ce problème peut être un des premiers où ils doivent produire plusieurs solutions ; l'élève doit donc comprendre qu'il ne peut se contenter de produire un seul résultat.

Pour résoudre le problème l'élève doit identifier les solutions identiques et les solutions différentes et pouvoir produire, si nécessaire, des solutions complémentaires réellement différentes des précédentes.

En premier il est nécessaire qu'il formule la solution en nombre de *a* et nombre de *b* ; en particulier lorsque les solutions sont produites de façon additive, par un cumul de *a* et de *b*, l'élève doit repérer celles présentant le même nombre de *a* et le même nombre de *b*, dans des écritures où ces nombres peuvent figurer dans un ordre différent. Par exemple il devra reconnaître que deux sommes comportant onze 8 et trois 3 écrits dans un ordre différent correspondent à la même solution.

La production d'une nouvelle solution peut s'appuyer sur les procédures précédemment décrites (cf. § « 1- Production d'une solution »)

Lorsque les solutions sont produites sous forme de multiples de *a* et de *b* ; il est aussi possible de faire des échanges *a* x *b* = *b* x *a* par exemple passer de 97 = 11 x 8 + 3 x 3 à 97 = 8 x 8 + (8 x 3) +(3 x 3) = 8 x 8 + 11 x 3.

d) Principales difficultés

Distinguons tout d'abord les comportements d'élèves qui s'arrêteraient après la production d'une solution, car ils seraient par exemple confrontés pour la première fois à la recherche des différentes solutions d'un problème. Ce comportement relève plutôt de l'explicitation des attentes liées au contrat didactique. Les principales difficultés pour la production d'une ou plusieurs solutions portent sur :

- l'instabilité même de procédures qui sont abandonnées sans qu'un bilan soit effectué sur les résultats produits et que l'écart avec le but à atteindre soit déterminé ; ces changements de procédures, sans que celles-ci soient évaluées, ne permettent pas de les améliorer ;
- la lenteur des procédures par cumul, ainsi que les risques d'erreurs dans les calculs liés aux échanges au voisinage du but *c*, ainsi que l'oubli ou l'interprétation erronée des nombres de *a* et de *b* ;
- la gestion des procédures par essais : l'élève doit en effet interpréter l'écart au but pour effectuer son essai suivant : choisir les nombres *x* et *y* pour se rapprocher du but (évoluer dans le bon sens).

e) Procédures de preuve

Elles ont pour but d'établir que toutes les solutions ont été produites. Pour cela l'élève doit :

- identifier les solutions différentes ;
- repérer comment varient les couples de nombres, d'une solution à l'autre (de combien augmentent ou diminuent le nombre de *a* et le nombre de *b*) ;
- compléter cette liste en réorganisant éventuellement les solutions déjà produites par ordre croissant ou décroissant de *a* ou de *b* ;
- formuler cette organisation et sa justification.

f) Apprentissages visés dans le domaine de la preuve

Le travail de preuve porte donc sur l'organisation de l'exhaustivité et sa justification. Plus spécifiquement, l'objectif de la situation est de permettre aux élèves :

- de prendre conscience de la nécessité de prouver, ne pas se contenter de la simple conviction qu'ils n'arrivent pas à produire de nouvelles solutions ;
- de développer un raisonnement prouvant l'exhaustivité, à partir de l'identification des variables et de l'organisation des solutions.

2.2- Problèmes à deux contraintes

Dans ces problèmes le lien entre ce qui est connu et ce qui est cherché est donné par deux relations, par exemple trouver deux nombres entiers dont on connaît la somme *(1ère contrainte*) et la différence *(2e contrainte)*, ou trouver trois nombres qui se suivent *(1ère contrainte)* dont on connaît la somme *(2e contrainte)*. Une contrainte peut correspondre à plusieurs relations algébriques.

Trois problèmes appartenant à cette catégorie ont été expérimentés : *Somme et différence, La tirelire* (trouver un nombre de pièces de 5 F et de 2F connaissant la valeur de la somme et le nombre total de pièces) et *Les trois nombres qui se suivent*.

Dans les deux premiers problèmes le modèle de résolution expert est un système de deux équations à deux inconnues, admettant une solution ($ax + by = c$; $a'x + b'y = c'$) pour les valeurs positives entières de $a, b, c, a', b', c', x, y$. Ces modèles de résolution sont étudiés au collège (principalement en 3e).

En généralisant des problèmes pouvant s'exprimer sous la forme d'équations du premier degré où le nombre d'équations est égal à celui des inconnues, comme c'est le cas pour le problème *Les trois nombres qui se suivent* où il n'y a pas de congruence entre l'expression en français et sa traduction arithmétique : une des contraintes se traduit par deux équations.

Les premières phases des situations concernent la résolution des problèmes avec des données numériques choisies pour qu'une solution existe, et dans ce cas, elle est unique. Les phases suivantes proposent des problèmes de preuve :

- pour *Les trois nombres qui se suivent*, la preuve d'une impossibilité, (« trouver trois nombres qui se suivent dont la somme est 25 »), puis celle de la solution générale du problème (« quels sont les nombres qui sont la somme de trois nombres qui se suivent ») ;
- pour *La tirelire*, la preuve de l'unicité de la solution ;
- pour *Somme et différence*, la preuve d'une impossibilité (trouver deux nombres entiers dont la somme et la différence sont l'une paire et l'autre impaire), puis celle de la solution générale du problème (comment choisir la somme et la différence pour que le problème admette une solution).

2.2.1 Les trois nombres qui se suivent :

Il s'agit de trouver trois nombres entiers qui se suivent dont la somme est donnée. Selon que la somme choisie est multiple de 3 ou non, il y a une solution entière ou le problème est impossible. Trois problèmes sont proposés.

1) Premier problème : résolution pour des valeurs particulières admettant une solution

Le problème propose de chercher trois nombres qui se suivent dont la somme est donnée. Dans l'expérimentation les valeurs ont été 96, puis 78 ou 354

a) Variables didactiques

Les principales variables sont donc :

- l'existence d'une solution (le nombre doit être un multiple de 3) ;
- le choix d'un chiffre des dizaines, pour un nombre inférieur à 100, ou d'un chiffre des centaines multiple de 3 ; ce choix rend possible le traitement de

deux sous problèmes : la décomposition des dizaines ou des centaines en 3, puis la résolution du problème pour le nombre restant ;

- la taille des nombres pour faciliter les calculs ou au contraire rendre nécessaire la gestion des essais.

b) Procédures de résolution

Les procédures efficaces que peuvent élaborer les élèves, avant la maîtrise de la division, consistent principalement à gérer des essais successifs du même type, c'est à dire respectant une des contraintes (les trois nombres se suivent ou la somme est atteinte) et en faisant varier l'autre :

- essai de triplets de nombres qui se suivent : 10+11+12 = 33, 11+12+13 = 36…
- décomposition de 96 en une somme de trois nombres exemple 50+40+6 et évolution de cette décomposition 30+30+36 ;
- recours à des procédures de partage, en s'appuyant sur une décomposition des nombres en dizaines et unités ou en centaines, dizaines, unités, lorsque le premier chiffre est un multiple de 3 :
    - partager les dizaines en trois, pour les nombres à deux chiffres, puis chercher trois nombres qui se suivent dont la somme est égale au chiffre des unités ; par exemple pour 96 partager 90 en trois, puis chercher à atteindre 6 comme étant la somme de trois nombres qui se suivent (6 = 1+2+3) puis recomposer le résultat (31, 32, 33). Cette méthode ne serait pas valable quand le chiffre des dizaines n'est pas un multiple de 3 (ni par conséquent le chiffre des unités);
    - partager les centaines en trois quand le chiffre des centaines est multiple de 3 pour les nombres à trois chiffres et résoudre le problème, pour 354 par exemple, en cherchant d'abord trois nombres qui se suivent dont la somme est 54 (17, 18, 19) puis ajouter 100 à chacun d'eux (117, 118, 119).

Cette procédure n'est pas adéquate pour tous les nombres. Dans les expérimentations, après une recherche pour 96, 78 et 354 sont proposés. La recherche de trois nombres qui se suivent dont la somme est 78 ne peut être effectuée en cherchant trois nombres (égaux qui plus est) dont la somme est 7 et trois nombres qui se suivent dont la somme est 8. Si les procédures produites par l'élève privilégient l'autre contrainte, le problème peut se décomposer en 78 = 60+18 avec la recherche de trois nombres qui se suivent dont la somme est 18.

- recours à la division et ajustement. Une fois la division maîtrisée, ce problème constitue alors un problème intéressant d'application de la division, mais n'est plus véritablement une situation de preuve. La question posée est plutôt l'identification ou l'exécution d'un modèle que l'établissement d'une preuve. Aussi, ces problèmes ont été principalement expérimentés en début de CM1, car la connaissance de la division peut en modifier la finalité qui n'est plus l'organisation des essais, ou l'émission d'hypothèses, mais plutôt de découvrir comment la division est efficace pour résoudre un nouveau type de problème.

c) Difficultés

Elles peuvent être liées à la gestion des procédures par essais successifs ; elles ont déjà été évoquées pour le problème précédent, mais non seulement les essais successifs doivent se rapprocher du but, mais aussi « à une bonne vitesse » sans produire tous les calculs intermédiaires, sinon ils seront trop nombreux et les risques d'erreur augmenteront.

d) Apprentissages visés dans le domaine de la preuve :

Pour ce problème, il n'y a pas de travail spécifique de preuve, supposant le recours à des débats. La validation s'effectue relativement aux deux contraintes (les trois nombres se suivent et leur somme est bien le nombre proposé) ; il s'agit d'un bilan qui est souvent intrinsèque à la procédure de résolution dès que l'élève n'oublie pas une des contraintes.

La critique des méthodes porte sur des critères techniques relatifs à l'organisation des essais (prise en compte de l'écart entre la solution produite et le but à atteindre, gestion des essais successifs tant d'un point de vue de l'écrit que du choix des valeurs ou des procédures de calcul).

2) Deuxième problème : Preuve d'une impossibilité

Dans ce problème, les élèves ont à chercher trois nombres qui se suivent dont la somme est 25, puis, une fois que le constat a été établi qu'aucune solution entière n'a été produite, les élèves ont à prouver une impossibilité en produisant, individuellement, par écrit, une proposition justifiant à leurs yeux cette impossibilité. Ces propositions sont ensuite débattues collectivement.

a) Preuves visées

Les preuves de l'impossibilité peuvent être constituées par :

- le recours à des encadrements (6+7+8 = 21, 7+8+9 = 24, 8+9+10 = 27, ces deux derniers résultats encadrent le nombre 25) et au constat que l'on ne peut pas trouver trois nombres qui se suivent entre 7, 8, 9 et 8 ,9, 10 ;
- la production de décomposition de 25 en trois nombres et la vérification que les nombres ne se suivent pas ; cette production peut être limitée à des nombres voisins : 6+7+12 ; 7+8+10, 7+9+9, 8+8+9.
- le recours à la division n'est pas envisagé car 25 n'est pas multiple de 3. Cependant le recours aux résultats multiplicatifs (tables…) peut permettre de centrer les essais autour de 8.

b) Apprentissage visé dans le domaine de la preuve

La critique des propositions vise à mettre en évidence :

- qu'un constat dépourvu de justifications n'est pas recevable ;
- la distinction entre une propriété vraie pour le nombre mais non probante et une preuve, par exemple, certains élèves peuvent penser qu'avec 25, il n'y a pas de solution parce que 25 est impair (une telle proposition sous-entend que seuls les nombres pairs sont solutions du problème, ce qui est induit par les valeurs proposées 96, 78, 354 dans le problème précédent). Le fait que 25 soit impair est une proposition vraie, mais qui ne justifie pas l'impossibilité.
- le rôle du contre-exemple pour infirmer une proposition, notamment dans la critique de la proposition précédente (on peut trouver un nombre impair qui est la somme de trois nombres qui se suivent).

3) Troisième problème : recherche des conditions d'existence d'une solution

Ce problème propose de chercher tous les nombres qui sont la somme de trois nombres qui se suivent, et de formuler une propriété permettant de les caractériser. Ce problème diffère aussi des deux précédents parce que ce qui était connu dans les problèmes précédents (la valeur de la somme) est maintenant inconnu. Pour réduire les difficultés liées aux calculs, en particulier en début de CM1, et faciliter la comparaison des propositions à partir des mêmes nombres, une limitation du domaine numérique est proposée (« Trouver tous les nombres entre 50 et 100 qui sont la somme de trois nombres qui se suivent »).

a) Procédures de résolution

La solution de ce problème suppose que, dans un premier temps, les élèves puissent induire une solution à partir de premiers essais ; puis qu'une propriété se dégageant des exemples soit formulée et qu'elle soit prouvée.

Les principales procédures possibles sont donc :

- la production de quelques solutions,
- la production d'une suite systématique de nombres solutions (51, 54, 57…) finie, présentée comme se continuant au delà des valeurs écrites ;
- la formulation d'une solution générale :
  - les solutions vont de 3 en 3,
  - les nombres sont dans la table de 3 ou sont des multiples de 3.

b) Principales procédures de preuve

Les justifications produites attendues peuvent être liées :

- à la relation entre les solutions induite lors de la production de solutions ; les solutions vont de trois en trois, on passe d'un triplet au suivant en ajoutant 3 à la somme :
  - en ajoutant 1 à chacun des nombres,
  - en ajoutant 3 au premier nombre d'une série sans changer les deux autres, il devient le dernier nombre de la série suivante, donc la somme augmente de 3 ;
- aux relations entre les trois nombres : la somme est égale à trois fois le nombre du milieu ;
- au fait que les nombres sont des multiples de 3 en se référant ou non à la table de 3.

c) Apprentissages visés dans le domaine de la preuve

Les enjeux de preuve portent donc sur :

- la nécessité d'une justification autre que le simple constat ;
- le passage de la preuve par une liste des solutions à la formulation d'une propriété.

Pour ce problème l'objet de l'apprentissage peut être la formulation, ou la prise de conscience de cette propriété.

4) Comparaison des problèmes de validation dans ces différents problèmes

Le tableau ci-dessous récapitule ces différentes phases

	1e problème	2e problème	3e problème
Connu	Somme	Somme	
Inconnu	3 nombres	3 nombres	Sommes, nombres variable indéterminée
Type de solution	Particulière	Particulière	Générale
Problème de preuve	*Vérification des contraintes,*	Impossibilité	Conditions d'existence d'une solution - propriété universelle

La comparaison de ces trois problèmes permet aussi de mettre en évidence les objets et les finalités différentes des mises en commun.

2.2.2 Somme et différence

Le problème propose de trouver deux nombres entiers positifs dont on connaît la somme et la différence. Lorsque la somme et la différence sont toutes les deux paires, ou toutes les deux impaires, il y a une solution, sinon le problème est impossible. Les nombres cherchés étant positifs la somme S doit être supérieure à la différence D.

Pour que les situations proposées constituent des problèmes pour les élèves, il est nécessaire que des modèles experts ne soient pas connus. Ces modèles étant :

- un système de 2 équations à deux inconnues qui produit :
  - soit deux nombres entiers si les deux termes du couple (S,D) sont de même parité,
  - soit deux nombres décimaux dans le cas contraire ;
- la procédure de recherche de la moitié de la somme, à laquelle on ajoute la moitié de la différence pour trouver l'un des nombres, et à laquelle on retranche la moitié de la différence pour trouver l'autre. Dans le cas où la somme et la différence sont impaires des calculs intermédiaires font intervenir des nombres décimaux. Au cycle 3 la justification de cette procédure peut être :
  - soit la vérification de la somme et de la différence ;
  - soit la reformulation des actions explicitant le procédé général ou s'appuyant éventuellement sur un exemple générique.

Cette situation se compose de trois problèmes :

- la résolution pour des valeurs pour lesquelles une solution existe ;
- la preuve de l'impossibilité pour une ou des valeurs particulières avec la somme et la différence étant l'une paire et l'autre impaire. Des problèmes avec la somme S inférieure à la différence D, qui conduiraient aussi à des impossibilités, les nombres cherchés étant des entiers positifs (l'étude des entiers négatifs relevant du collège), n'ont pas été envisagés (le fait que la somme est supérieure à la différence constitue une évidence pour les élèves à ce niveau).
- la formulation d'une méthode générale de résolution et la justification que les couples de nombres ayant une solution sont de même parité.

<u>1) Premier problème : Résolution pour des valeurs pour lesquelles une solution existe</u>

Les procédures attendues sont celles relatives à un problème à deux contraintes comme pour le problème précédent *Les trois nombres qui se suivent* : fixer l'une et faire varier l'autre de façon économique :

- décomposer la somme en deux nombres, calculer la différence et ajuster la décomposition à l'essai suivant ;
- fixer la différence et faire varier l'un des nombres jusqu'à obtenir la somme.

Pour ce problème, comme pour la situation *Les trois nombres qui se suivent* (cf 2.2.1), la validation des solutions s'effectue par la confrontation avec les contraintes de l'énoncé. La validation des méthodes fait appel à des critères techniques relatifs à l'organisation des essais (prise en compte de l'écart entre la solution produite et le but à atteindre pour la gestion des essais successifs). Dans cette phase, il n'y a donc pas de travail de preuve spécifique.

<u>2) Deuxième problème : preuve de l'impossibilité pour des valeurs particulières</u>

Dans le deuxième problème, les élèves ont à prouver l'impossibilité de trouver une solution avec des nombres entiers pour deux valeurs particulières (avec *S* impaire et *D* paire ou l'inverse). Ce travail de preuve est demandé une fois que les élèves constatent qu'ils ne produisent pas de solution :

a) Variables

Le choix des valeurs numériques peut constituer une variable de la situation :

- choisir *D* petit peut permettre des calculs plus rapides, pour ne pas alourdir les tâches de calcul lors de la production d'encadrements,
- choisir *S* pair permet d'en calculer la moitié et de l'utiliser pour des essais.

b) Preuves

Les propositions que peuvent produire les élèves sont :

- des affirmations sans justifications, de simples constats ;
- des propositions portant sur des propriétés des nombres, partielles ou non, justifiées ou non.

Les preuves peuvent être :

- une recherche exhaustive ou non des solutions : *S* étant fixé, des couples de nombres sont produits dont la somme est donnée et dont la différence croît ou décroît par exemple pour 64 et 5 effectuer :
  - 33+31 = 64 ; 33 -31 = 2 ;
  - 34+30 = 64 ; 34-30 = 4 ;
  - 35+29 = 64 ; 35-29 = 6 ;
  - puis 36+28 = 64 ; 36-28 = 8.

- nous n'excluons pas la production d'une solution avec les décimaux :
  - soit à partir de calculs précédents et du constat que les différences allant de 2 en 2 lorsque le premier nombre augmente de 1 et

le second diminue de 1, si le premier augmente de 0,5 et le second diminue de 0,5 alors la différence augmente de 1 : 34,5-29,5 ;

- soit par la recherche de la moitié de la somme, à laquelle on ajoute la moitié de la différence exemple 32 + 2,5 = 34,5 et 32 - 2,5 = 29,5 ; ce calcul pouvant être suivi de la vérification de la différence.

c) Apprentissage visé dans le domaine de la preuve

Comme pour le problème d'impossibilité pour *Les trois nombres qui se suivent*, la critique des propositions a pour premier but de mettre en évidence qu'un constat dépourvu de justifications ou accompagné de propositions qui seraient redondantes ("parce qu'on ne peut pas calculer") n'est pas recevable.

Mais l'objectif est l'établissement de l'impossibilité par l'encadrement de la différence visée par des valeurs vérifiant la somme, mais dont la différence est erronée.

La critique des preuves produites porte aussi sur la mise en évidence de l'insuffisance de certaines d'entre elles : essais de quelques valeurs sans mise en relation des résultats, tentative d'encadrement inachevé…

3) Troisième problème : conditions d'existence de solutions

Ce problème propose de chercher quels sont les couples de nombres que l'on peut choisir pour la somme S et la différence D, de façon à ce que le problème admette une solution. Pour ce problème aucun couple (S,D) n'est la somme et la différence de deux nombres entiers x et y, lorsque S et D ne sont pas de même parité ; en effet $x+y = S$ et $x-y= D$ conduit à $x = (S+D)/2$ et $y = (S-D)/2$; pour que x et y soient des entiers il faut que $S+D$ et $S-D$ soient deux nombres pairs donc que S et D soient de même parité.

Comme dans *Les trois nombres qui se suivent,* il y a une inversion, par rapport aux deux problèmes précédents de *Somme et différence* (recherche d'une solution et preuve d'une impossibilité) entre ce qui est connu et ce qui est cherché ; ici ce sont des propriétés des valeurs de la somme et de la différence qui sont cherchées et les nombres que l'on ajoute ou que l'on retranche pour les obtenir sont choisis par les élèves, et ne font plus l'objet de la recherche.

La résolution peut s'appuyer sur une exploration par des essais, complémentaires de ceux effectués lors de la résolution des problèmes précédents, tout en sachant que ces derniers offrent déjà un ensemble de calculs, fructueux ou non, à partir desquels des généralisations peuvent être induites.

Les élèves ont à formuler une proposition, qui est soumise à la critique.

Procédures de preuve

Les preuves possibles :

- des tentatives de production de la solution avec des décimaux, suivies du constat que les solutions ne sont pas entières ;
- la recherche exhaustive de tous les cas en partant d'une analyse de la parité des nombres qui sont solution. Ceci suppose d'étudier 3 cas différents :
    - les deux nombres sont pairs, alors leur somme et leur différence sont paires ;
    - les deux nombres sont impairs, alors leur somme et leur différence sont paires ;

- un des nombre est pair et l'autre impair alors leur somme et leur différence sont impaires, de conclure à partir de cette recherche exhaustive des cas possibles.

Ce troisième problème pose donc la question de la relation entre ce que les élèves peuvent prendre en charge lors d'une mise en commun et ce qui incombe au maître lors de la synthèse dans cette disjonction des cas.

4) Relations entre les problèmes de preuve proposés

Le tableau ci-dessous récapitule les caractéristiques essentielles des trois problèmes

	1e problème	2e problème	3e problème
Connu	S et D	S et D	
Inconnu	x et y	x et y	S et D x et y *indéterminés*
Type de solution	Particulier	Particulier	Général
Problème de preuve	*Simple vérification des contraintes*	Impossibilité	Propriété universelle

2.2.3 La tirelire

Ce problème propose de chercher combien il y a de pièces de 2 francs et de pièces de 5 francs dans une tirelire connaissant le nombre total P de pièces de deux types et la valeur S de la somme.

Dans une première phase les élèves ont à chercher la solution pour deux valeurs particulières (la somme vaut 97 F et le nombre total de pièces est 32). Dans une seconde phase, les élèves ont à prouver que cette solution est unique.

a) Procédures de résolution

Une analyse de ces procédures a été effectuée par Porcheron J.-L. et Guillaume J.-C. (1984). Les principales procédures permettant la résolution au niveau du cycle 3 sont :

- des essais de couples de pièces dont le nombre total est P (par exemple, pour P = 32, 16 pièces de 2 F et 16 pièces de 5 F) avec un contrôle sur la somme (ici 112 = 16x5 + 16x2) et une modification de la répartition du nombre de pièces de chaque type (ici augmentation du nombre de pièces de 2 F et diminution du nombre de pièces de 5 F) en maintenant le total des pièces à 32 ;
- des essais de couples de pièces dont la somme est S (par exemple pour S = 97 F, à l'issue d'une division de 97 par 5, soit 19 pièces de 5 F et 1 pièce de 2 F) avec un bilan sur le nombre de pièces (ici 20), suivi d'une modification de la répartition du nombre de pièces de chaque type (ici augmentation du nombre de pièces de 2 F et diminution du nombre de pièces de 5 F) en échangeant explicitement ou non deux pièces de 5 F et cinq pièces de 2 F, la somme restant identique, jusqu'à obtenir le bon nombre de pièces.
- une réduction à des sous-problèmes (passer de 97 F avec 32 pièces à 90 F avec 30 pièces sachant que pour produire 7 F il faut une pièce de 5 F et une de

2 F) puis utilisation d'une des procédures antérieures et appui sur un calcul avec des dizaines entières. On peut aussi envisager des décompositions de 9 en 5+2+2 ; donc 3 pièces pour faire 9 et 30 pour faire 90.

- des essais de couples de pièces prenant en compte les deux contraintes.

Les valeurs choisies constituent une variable didactique de la situation, des nombres plus petits pour *S* et *P* facilitant la gestion des essais.

b) La preuve de l'unicité

Le problème de preuve porte sur l'unicité de la solution.

Celle-ci s'établit, une fois la solution trouvée (ici 11 pièces de 5 F et 21 pièces de 2 F) par l'étude de la variation de la somme lorsque la répartition des pièces change au voisinage de la solution.

Ce constat est assez simple à formuler (si on prend plus de pièces de 5 F et moins de pièces de 2 F - avec un nombre de pièces constant- la somme dépassera 97 F…). La formulation de la règle d'échange : 2 pièces de 5 F contre 5 pièces de 2 F permet aussi de construire ce résultat.

2.3 Problèmes d'optimisation

Dans ce domaine nous avons choisi deux problèmes l'un contextualisé où il s'agit de prouver l'impossibilité, l'autre purement numérique qui sera résolu d'une part pour des valeurs particulières du paramètre et d'autre part dans le cas général.

2.3.1 Egalisation de sommes

a) Problème

Dans la situation *La piscine* (ERMEL CM1 1997), les élèves doivent répartir des groupes d'élèves qui vont à la piscine, sans séparer les enfants d'un même groupe, en utilisant le minimum de créneaux et sans dépasser un maximum d'élèves par créneau (180). Il s'agit donc de constituer des groupes avec des nombres donnés, en tenant compte de contraintes : leur somme ne doit pas dépasser une certaine valeur et tous les nombres doivent être utilisés une fois et une seule. Selon les données fournies, le problème peut avoir une, plusieurs, ou ne pas avoir de solutions.

Après la résolution du problème, on propose de prouver l'impossibilité de trouver une solution pour les données suivantes : « Avec des groupes d'enfants de 20, 60, 90, 140, 30, 70, 50, 80, comment peut-on envoyer tous les enfants à la piscine sur 3 créneaux ? » (les groupes ne peuvent être séparés et il ne peut y avoir plus de 180 enfants en même temps à la piscine).

b) Preuves

La preuve de l'impossibilité peut être établie :

- par la recherche de toutes les répartitions possibles ;
- par un raisonnement, plus rapide que la recherche de tous les cas : l'impossibilité de compléter à 180, le groupe de 140, avec les valeurs numériques données (au mieux on obtient 140 + 30 = 170). La somme étant 540, deux créneaux ne pourront accueillir les 370 élèves restants.

La limitation de la recherche de toutes les répartitions possibles par un raisonnement constitue une évolution par rapport aux méthodes développées au CE2, où l'on peut trouver de telles situations sans les mêmes enjeux de preuve : la validation des solutions dans des problèmes d'optimisation ou de recherche de toutes les possibilités ne peut s'effectuer que par la vérification du respect des contraintes de l'énoncé et l'explicitation d'une méthode garantissant qu'il s'agissait de la solution optimale pour les premiers et de l'exhaustivité pour les seconds[9].

c)Variables

La relation entre la somme totale et les multiples de 180 constitue une variable. Dans le cas où la somme dépasse 540 -par exemple avec 30, 60, 70, 90, 100, 110, 50, 40, la somme est 550 - ce résultat permet d'affirmer qu'il est nécessaire de répartir les élèves en au moins quatre créneaux ; ce choix permet de constater l'impossibilité par vérification du total sans obliger à une exploration des répartitions. Ce choix peut être utilisé pour simplifier la situation afin de permettre dans un premier temps à des élèves d'accéder à ce problème de preuve d'une impossibilité.

2.3.2 Le plus grand produit

Cette situation propose de chercher dans les décompositions additives d'un nombre en nombres entiers, celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.

Deux problèmes différents se posent suivant qu'il s'agit de résoudre pour des valeurs particulières ou pour n'importe quel nombre entier[10].

Le second problème ne peut être posé que si le premier a déjà été cherché pour induire des solutions. La recherche est proposée en premier pour quelques valeurs numériques afin de permettre aux élèves :

- de comprendre les relations entre les termes de l'énoncé : produire des décompositions additives puis faire le produit des termes de cette décomposition ;
- de comparer des premiers résultats, de percevoir des régularités voire d'émettre des premières hypothèses.

Puis le problème général est proposé aux élèves : ils ont à formuler comment obtenir le plus grand produit pour n'importe quel nombre. Cette formulation s'effectue sous la forme de propositions individuelles.

a) Résolution du problème (cas général)

Pour tout nombre une décomposition additive peut être produite. Pour la caractériser, plusieurs propositions interviennent :

- L0 La décomposition ne comporte pas de zéro.

0 élément absorbant de la multiplication. Au cycle 3 cette proposition est une évidence fondée sur un savoir.

- L1 La décomposition ne comporte pas de 1.

[9] On peut trouver de telles situations d'optimisation dans ERMEL CE2 (1995) *Egalisation de sommes* et *Bateaux* ainsi que des situations de recherche de toutes les possibilités : *Faire 23, Monnaie de 100 F* et surtout *Somme des chiffres*.

[10] Daniel Perrin analyse ce problème, en particulier dans le cas ou les nombres sont des réels, dans le paragraphe «Une approche heuristique du problème du plus grand produit » de sa préface à ERMEL (1999 b pp 15 et 16).

1 est élément neutre de la multiplication (nx1 = n < n+1), ce qui peut s'exprimer par : il ne faut pas laisser de 1 dans la décomposition additive, car le 1 n'augmente pas le produit.

- L2 Il ne suffit pas de décomposer en deux termes.

Cette proposition n'est pas un lemme, mais beaucoup d'élèves privilégient dans un premier temps des produits de deux termes, qui limitent leur obtention de plus grands produits au delà de 7. Dans le cas d'une décomposition en deux termes le produit est maximal pour $(n/2)^2$ si n est pair et $((n-1)/2) \times ((n+1)/2)$ si n est impair. Mais pour $n \geq 8$ la décomposition en trois termes est supérieure à un produit de deux termes (c'est une conséquence des deux lemmes suivants).

- L3 La décomposition ne comporte pas de nombre supérieur ou égal à 5

Dans une décomposition additive tout nombre supérieur ou égal à 5 doit être décomposé en deux nombres entiers supérieurs à 1, le produit de ces 2 termes sera plus grand que le nombre de départ.

En effet, si n est un des nombres de la décomposition supérieur ou égal à 5, en le remplaçant par $[(n-2) + 2]$ on ne change pas la somme, et le produit devient $2 \times (n-2) = 2n - 4 = n + (n-4)$. Or $(n-4)$ est positif si $n > 4$, donc $n + (n-4) > n$ si $n > 4$, donc $2\text{x}(n-2) > n$ si $n > 4$. Donc tout nombre n supérieur ou égal à 5 permet d'obtenir un plus grand produit si on le remplace par $2 \times (n-2)$. Comme 4 = 2x2 , on ne modifie pas la valeur du produit en le décomposant ainsi. La découverte de ce lemme se fait pour le cas de 5 : 5 = 3+2 et 3x2 = 6 > 5.

En appliquant ce lemme et les précédents les seuls nombres conservés dans la décomposition sont des 2 des 3 ou des 4. La décomposition permettant de trouver le plus grand produit peut s'écrire uniquement avec des 2 et des 3, puisque 4 peut être remplacé par 2x2 sans modifier ni la somme ni le produit.

- L4 Lorsque le nombre de 2 est égal ou supérieur à trois, on remplace trois 2 par deux 3 sans modifier la somme mais en améliorant le produit

Preuve : 2x2x2 = 8 et 3x3 = 9. La preuve de cette proposition est l'énoncé d'un résultat numérique. Donc le nombre de 2 conservé parmi les termes du plus grand produit est zéro, un ou deux.

Propositions attendues

Chacune de ces propriétés peut être formulée par des élèves de CM (sans utiliser des notations littérales), lors de la critique de propositions débattues. Bien entendu, il n'est pas attendu qu'elles soient exprimées par eux, directement, dans une formulation synthétique.

b) Mise en forme de la solution

La solution du problème peut donc s'exprimer de la façon suivante :

- si $x = 3n$ le plus grand produit est 3^n (par exemple pour 12 le plus grand produit est 3 x 3 x 3 x 3 = 81) ; il n'y a pas de 2 dans la décomposition ;
- si $x = 3n + 1$, le plus grand produit est $3^{n-1} \text{x} 2^2$ (par exemple pour 10 le plus grand produit est 36, 3 x 3 x 4 ou 3 x 3 x 2 x 2); il y a deux 2 dans la décomposition ;

- si $x = 3n + 2$, le plus grand produit est $3^n x2$ (par exemple pour 14 le plus grand produit est 3 x 3 x 3 x 3 x 2 = 162). il y a un 2 dans la décomposition.

Les élèves peuvent repérer que les solutions de chacune de ces trois catégories vont de 3 en 3.

c) Variables

Le champ numérique proposé est limité car les connaissances des élèves du CM1 ou du CM2 ne leur permettent pas de résoudre le problème quel que soit le nombre donné. Par exemple si les élèves peuvent comprendre que pour 100, le produit 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 est plus grand que 50 x 50, il est très difficile qu'ils conçoivent lors des phases de recherche, que l'on puisse trouver des décompositions donnant des produits plus grands que 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 ; les calculs devenant aussi trop longs et par conséquent hasardeux. De plus, les élèves ne disposent pas d'une écriture des nombres avec des exposants pour noter les puissances des nombres et à plus forte raison de règles de calcul sur ces puissances. Il est donc nécessaire de limiter le champ numérique (jusqu'à 20 ou 25) pour permettre la comparaison des essais et la critique des propositions par le calcul de contre-exemples éventuels.

d) Apprentissages visés dans le domaine de la preuve

Les preuves attendues sont :

- le simple constat après un calcul pour quelques décompositions que de meilleures solutions ne sont pas obtenues donc ne peuvent l'être ,
- l'expérience cruciale par un essai sur un grand nombre,
- le recours à des exemples génériques,
- le recours à des contre-exemples,
- le recours à une propriété connue.

Les enjeux de preuve sont aussi de comprendre qu'il est possible de formuler des hypothèses et de les valider plutôt que de chercher toutes les solutions pour choisir la meilleure.

2.4. Problèmes de dénombrement

Les deux problèmes *Cordes* et *Somme des n premiers nombres* visent tous les deux l'élaboration d'une formule permettant de calculer la somme des nombres de 1 à n ou de 1 à n-1 pour *Cordes*.

La première situation *Cordes* s'appuie sur un contexte géométrique (déterminer le nombre de cordes reliant n points sur un cercle), la seconde *Somme des n premiers nombres* étant posée dans un contexte uniquement numérique. Ce second problème peut être proposé après le premier dans le cas ou la généralisation n'aurait pas été abordée à la fin de la situation *Cordes*.

2.4.1 Cordes

Cette situation a été proposée avec les valeurs numériques: n = 6, 10, 32.

a) Procédures de résolution

- **P1 Procédures basées sur le dessin** :

Cette procédure comporte le dessin des cordes puis leur dénombrement soit au fur et à mesure de leur tracé, soit après, éventuellement en cochant ou en numérotant les cordes recomptées.

- P2 Procédures basées sur une modélisation additive (qui correspond à la somme des n premiers nombres)

- P2.1 : association de n -1 cordes au premier point, de n -2 cordes au deuxième… puis calcul de $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1$

- P2.2 : Réduction des calculs additifs en regroupant les calculs selon la position du chiffre dans le nombre :

- somme des unités : 45 pour une dizaine, 450 pour une centaine… puis somme des dizaines : 100 de 10 à 19, 200 de 20 à 29 donc 4500 de 10 à 90, etc.

- par dizaine (somme des nombres de 1à 10, de 10 à 20…)

-P3 Procédures basées sur une modélisation multiplicative

- P3.1 : réduction du calcul additif : repérer que dans l'écriture $1+2+\ldots+p+\ldots+((n-1)-p)+\ldots+(n-2)+(n-1)$, les sommes n-1 et 1, n-2 et 2, … $((n-1)-p)$ +… sont égales à n, puis déterminer le nombre de termes après regroupement

- en distinguant deux cas suivant que :

- n pair, alors il y a un nombre impair de termes et la somme contient $(n-2)/2$ termes valant n plus le terme du milieu $n/2$ soit $n(n-2)/2 + n/2$;

- n impair alors il y a $(n-1)$ termes, un nombre pair de termes, pouvant être associés deux par deux et la somme vaut $(n-1)\, n/2$;

- écrire la somme S des nombres de 1 à n-1 et en dessous de chaque terme de n-1 à 1, puis additionner les deux sommes, en déduire la valeur de 2 S puis de S ;

- P3.2 : basées sur le contexte de la situation : chaque point est associé à tous les autres donc de chaque point il « part » n-1 cordes, comme il y a n points, il y a $n\,(n-1)$ cordes, mais chacune est comptée deux fois.

Dans sa thèse Balacheff (1988 p 63) analyse une situation proche, le nombre de diagonales d'un polygone, qu'il expérimente principalement avec des élèves de 4e. Aux deux types de procédures fondées sur le dénombrement ou « la remarque de l'invariance du nombre des diagonales en chaque sommet », il envisage avec scepticisme une approche combinatoire.

Dans d'autres contextes (nombre de cases d'un quadrillage en forme d'escalier, poignées de main entre n personnes…), des modélisations différentes liées au contexte sont possibles. Tous ces contextes ne sont pas équivalents, leur comparaison sort du cadre de cette étude.

b) Variables

La taille des valeurs numériques va principalement déterminer la procédure :

- pour certaines valeurs le dessin et le comptage des cordes sont possibles. Cette procédure -tant pour le tracé, qui peut être plus méthodique,

que surtout pour le dénombrement - devient inefficace lorsque le nombre de cordes augmente (lorsque le nombre de points double, le nombre de cordes est multiplié par un facteur 2 (2n-1)/(*n*-1) de l'ordre de 4).

- pour d'autres il est encore possible de tracer toutes les cordes mais difficile, voire impossible de les compter ; le calcul additif reste possible. La longueur de la procédure augmente proportionnellement à *n*.
- pour d'autres enfin le dénombrement est impossible et le calcul additif devient aussi trop long.

c) Evolution des procédures

Avec le contexte du dénombrement des Cordes, le retour à la situation de référence décentre naturellement du calcul additif (la modélisation additive s'appuie sur le raisonnement « le premier point est relié à toutes les autres, le deuxième à tous sauf le premier… », la modélisation multiplicative s'appuie sur le raisonnement « chaque point est relié à tous les autres …» . Une évolution : P1 -> P2.1 -> P3.2 est envisageable. Si les transitions entre les procédures peuvent être permises par la présence d'un contexte (le changement du cadre numérique au cadre géométrique), ici c'est la valeur de *n* qui provoque cette évolution.

d) Apprentissage visé dans le domaine de la preuve

Ce problème ne vise pas l'institutionnalisation d'une formule, mais la formulation d'hypothèses permettant une modélisation numérique (par exemple pour 10 : le premier point est associé aux 9 autres, le second à 8… donc le nombre de cordes est 9+8+…+2+1) et l'évolution de ce calcul additif vers un calcul multiplicatif (10x9/2 : chaque point est associé à tous les autres, chaque corde est comptée deux fois).

2.4.2 Somme des n premiers nombres

Cette situation propose de résoudre le même problème que le précédent mais sans le recours à un cadre géométrique. Les élèves ont à induire une proposition générale à partir de premières recherches sur des valeurs numériques permettant d'effectuer la somme des *n* premiers nombres.

Les procédures attendues peuvent être :

- des procédures de réduction de calculs additifs cf P 2.2,
- des procédures de regroupement en sommes égales cf. P 3.1,
- des procédures de calcul de 2 *S*,
- des hypothèses à partir de constats sur des recherches pour des nombres successifs (10 pour 1+2+3+4 ; 15 pour 1+2+3+4+5…).

3. ELEMENTS DE SYNTHESE SUR LES PROBLEMES PROPOSES

Dans cette partie nous proposons une première synthèse sur les problèmes proposés, à partir d'une comparaison des procédures de preuve qu'ils sollicitent.

3.1 L'enjeu de preuve

Pour que les élèves puissent entrer dans une démarche de preuve, il est nécessaire, ainsi que le précise Balacheff qu'il y ait un enjeu. Dans les problèmes proposés ici, l'enjeu ne provient pas d'une contradiction entre des conceptions des élèves et le modèle mathématique, puisque les problèmes portent sur des notions sur lesquelles ils n'ont pas de modèle disponible, mais plutôt entre la représentation du problème créée lors des premières recherches (les premiers résultats obtenus) et le problème de preuve posé ensuite auquel la résolution antérieure associe une valeur épistémique, et, bien évidemment, sur les solutions ou convictions différentes que peuvent avoir les élèves. L'enjeu est d'abord dans le défi intellectuel que pose le problème (il ne s'agit pas de prouver quelque chose dont les élèves sont persuadés).

Comme nous l'avons vu, l'enjeu peut être, pour l'élève, dû au passage :

- d'un problème qui paraît avoir, dans un premier temps une solution unique, à la recherche d'autres solutions ou de toutes les solutions (*Golf* 2^e^ problème, *Les trois nombres qui se suivent* 3^e^ problème, *Somme et différence* 3^e^ problème) ;
- d'un problème où une solution a été trouvée pour chacune des valeurs successivement proposées, à un problème où il n'y a pas de solution (*Les trois nombres qui se suivent* 2^e^ problème, *Somme et différence* 2^e^ problème) ;
- d'un problème résolu pour des valeurs particulières à la recherche d'une solution générale, ce qui suppose de changer de méthode soit par abandon du dessin ou des additions pour la multiplications (*Cordes*), abandon rendu nécessaire par l'augmentation du nombre de points, ou le passage de la production de calculs à une formulation de propositions demandée explicitement par le maître (*Le plus grand produit*).

3.2 Relations entre le problème initial et le problème de preuve

Plusieurs critères permettent de différencier les différents problèmes proposés que l'on pourrait formuler de façon un peu condensée en : « valeurs numériques ou proposition », « ancien ou nouveau », « direct ou inverse », « contextualisé ou décontextualisé » :

- La nature de la production : des valeurs numériques ou des propositions. Dans certains problèmes, la preuve concerne simplement un (ou quelques) résultats numériques ; dans d'autres cas, une proposition générale doit être formulée par l'élève (*Somme et différence* 3^e^ problème ou *Le plus grand produit*, *Les trois nombres qui se suivent* 3^e^ problème).

- problème « ancien ou nouveau » : le problème de preuve est-il impliqué par le problème précédent : répond-il à une nécessité déjà formulée dans ce problème, ou constitue-t-il une nouvelle recherche que le maître propose ? Dans certains cas le problème de preuve généralise une première recherche menée pour des valeurs particulières : recherche de toutes les possibilités dans la situation (*Golf*) ou la recherche du cas général (*Le plus grand produit*). Pour d'autres c'est un nouveau problème qui est proposé par l'enseignant, par exemple pour la preuve de l'impossibilité (*Somme et différence* 2^e^ problème, *Les trois nombres qui se suivent* 2^e^ problème).

- Problème « direct ou inverse » : le problème de preuve posé est, dans la plupart des cas, dans la continuité du problème précédent ; mais pour certains problèmes, le problème de preuve inverse ce qui était connu et ce qui était inconnu par rapport au problème antérieur : ce qui était connu devient alors devient l'objet de la recherche (*Les trois nombres qui se suivent* 3e problème, *Somme et différence* 3e problème).

- Problème « contextualisé ou décontextualisé » : des problèmes sont présentés soit à partir d'un contexte évoqué (*Tirelire, Piscine, Cordes)*, mais où les recherches numériques deviennent rapidement autonomes, la vérification des solutions demandant l'évocation de la situation (*Cordes*), soit directement comme un problème uniquement numérique : *Les trois nombres qui se suivent*, *Le plus grand produit*, *Golf*, *Somme des n premiers nombres*. La forme plus décontextualisée ne constitue pas un obstacle, l'enjeu de la recherche étant très fort pour les élèves. Ces problèmes portent donc assez directement sur des objets mathématiques.

Ces différents critères illustrent les différences existant entre ces problèmes, à un niveau ou un autre, entre le problème initial et le problème de preuve et posent donc la question de l'organisation entre les différentes recherches au sein de la même situation.

3.3 Les procédures de preuve :

a) Récapitulatif des procédures de preuve selon l'objet de la preuve

Les différents types de procédures de preuve attendues dans ces problèmes :

- preuve de l'exhaustivité par une réorganisation ordonnée des résultats (*Golf*) ;
- preuve d'une impossibilité par :
  - organisation des solutions et encadrement (*Les trois nombres qui se suivent* 2e problème) ;
  - recherche locale de tous les possibles (*Somme et différence* 2e problème) ;
- preuve de l'unicité par une organisation des solutions (*Tirelire*) ;
- preuve des conditions d'existence de solutions par :
  - des exemples génériques (*Les trois nombres qui se suivent* 3e problème),
  - l'énoncé de propriétés (*Les trois nombres qui se suivent* 3e problème),
  - une étude de tous les cas possibles (*Somme et différence* 3e problème) ;

- preuve d'une optimisation par :
  - recherche de tous les cas possibles (*La piscine*),
  - prise en compte d'une contrainte et réduction des cas (*La piscine*),
  - production de lemmes (*Le plus grand produit*) ;

- preuve d'un dénombrement par abandon des preuves pratiques et recours à une modélisation (*Cordes*).

Nous nous intéresserons plus particulièrement à deux types de procédures de preuve que l'on retrouve donc dans plusieurs problèmes : les procédures qui s'appuient sur l'organisation de résultats et celles basées sur la formulation de propriétés.

b) La production de nouvelles solutions

La justification de la preuve de l'unicité ou de l 'impossibilité par l'encadrement de cette valeur entre d'autres qui respectent une des contraintes mais ne satisfont pas à l'autre se retrouve donc dans plusieurs problèmes. Ces procédures peuvent être basées principalement sur des constats effectués à partir de calculs ou nécessiter des raisonnements permettant la recherche exhaustive de toutes les valeurs numériques obtenues en fixant une contrainte et en faisant varier l'autre, les nombres à chercher et les paramètres de la deuxième contrainte prenant alors le statut de variable, et soit :

- le dénombrement des solutions, pour l'exhaustivité ;
- la vérification que l'autre contrainte ne peut être satisfaite, pour l'impossibilité ;
- la vérification qu'une seule solution satisfait cette contrainte pour l'unicité.

Dans les deux derniers cas, cette vérification peut être effectuée pour les essais qui encadrent la donnée, sans dresser la liste de toutes les solutions satisfaisant une des contraintes (par exemple 7 + 8 + 9 = 24, 8 + 9 + 10 = 27).

De plus, dans ces situations où le travail de preuve est lié à l'explicitation des solutions, il ne peut se limiter à leur écriture au tableau : les principes de leur organisation doivent être formulés, et le plus souvent reformulés pour qu'ils soient compris par les autres élèves. Cela suppose une autre mise en forme langagière de la pensée que le simple calcul.

c) La production de propositions

D'autres preuves sont intellectuelles, car si l'accès à la réalisation pratique n'est pas toujours possible, l'élève est contraint à des raisonnements pour justifier que le champ des possibles -objet mathématique à construire- est bien parcouru. Rappelons la différence, selon Balacheff, entre preuves pragmatiques et preuves intellectuelles : lorsque l'accès à la réalisation pratique n'est pas possible, l'élève est contraint à des preuves intellectuelles, qui mobilisent une signification contre une autre, une pertinence contre une autre, une rationalité contre une autre. Ces preuves peuvent être constituées par un raisonnement permettant de réduire le champ des possibles, par exemple dans la situation *Le plus grand produit*, des propositions formulées portent sur les nombres plus grands que 5…, ou dans *Somme et différence* où la preuve de l'impossibilité par la recherche de tous les cas possibles pour la somme et la différence suppose une disjonction des cas sur la parité des nombres que l'on ajoute ou que l'on retranche.

Ces distinctions vont donc devoir être prises en compte dans la construction des séances, en particulier sur la nécessité de prévoir ou non la formulation écrite de propositions d'une part, ce qui n'est pas utile dans le cas de la vérification de l'exhaustivité et de sa justification, et d'autre part sur le type d'organisation du débat : simple mise en commun ou traitement de certaines propositions qui ne peuvent être critiquées immédiatement par un travail par groupe.

Il semble donc possible de distinguer :

- des preuves qui se limitent à une organisation explicite et justifiée des solutions ;
- des preuves nécessitant la formulation de propositions et leur critique par des raisonnements qui s'appuient sur des propriétés connues.

Dans le cadre de la théorie des situations, nous pouvons faire une distinction relative au milieu adidactique. Dans le premier cas, les résultats numériques produits préalablement sont à compléter éventuellement mais existent. Dans le second cas, la production de nouveaux résultats (propositions intermédiaires, raisonnements) est nécessaire. Il est nécessaire de changer de point de vue sur les résultats obtenus précédemment.

3.4 Classification des situations

Les différentes situations pourraient donc être regroupées suivant le type de proposition et leur traitement :

1- une proposition particulière résolue par des méthodes de calcul (par la mise en évidence de l'ensemble des résultats) : *Golf* ;

2- une proposition particulière (c'est à dire portant sur un nombre, ou un nombre fini de nombres) pouvant être traitée en recourant à une propriété générale par des élèves par exemple : *Somme et différence* phase 2 impossibilité ;

3- une proposition générale mais traitée de façon particulière (en fonction du choix de certaines variables didactiques) : *Les trois nombres qui se suivent* phase 3 : trouver tous les nombres entre 50 et 100 qui sont la somme de 3 nombres qui se suivent

4- une proposition générale (universelle) traitée par des raisonnements :
- *Le plus grand produit* ;
- *Les trois nombres qui se suivent* phase 3 : trouver tous les nombres qui sont la somme de 3 nombres qui se suivent si on ne donne pas un champ numérique ;
- *Somme et différence* phase 3 : quels sont les couples de nombres qui sont la somme et la différence de deux nombres ;
- *Cordes :* problème pour les grands nombres, passage à une problématique multiplicative.

4. L'ORGANISATION DIDACTIQUE

Dans chacune des situations présentées précédemment, avant une ou plusieurs phases traitant de questions de preuve, une première phase propose la résolution d'un problème pour des valeurs numériques précises ; cette phase permet à la fois la construction d'une représentation des buts et l'appropriation des contraintes. Pour ces problèmes, l'élève ne dispose d'aucun modèle qui lui aurait été enseigné auparavant.

a) l'organisation des situations

Les situations proposées présentent en général des points communs dans leur organisation :

- après une première phase de résolution d'un problème ouvert, les élèves ont à résoudre un problème de preuve : produire des solutions ou élaborer des propositions, qui sont éventuellement reformulées pour pouvoir être débattues;
- si les productions sont constituées par des résultats numériques, les solutions sont formulées et justifiées, une mise en commun permet leur critique.
- si les productions sont constituées par des propositions, ces propositions peuvent être traitées différemment lors d'une première mise en commun :
  - la valeur de vérité de certaines peut être établie lors de cette mise en commun, celles dont on est sûr qu'elles sont vraies ou fausses en faisant appel à des connaissances ou des critères de preuve reconnus,
  - celles pour lesquelles il n'y pas de certitude ou d'accord sur leur valeur de vérité mais qui devront être débattues en petits groupes ; les élèves ont à se prononcer : sont-elles vraies, fausses, et pourquoi ? Une nouvelle mise en commun permet de formuler les conclusions de chacun des groupes et de mener un débat collectif sur la validité de ces propositions;
- une synthèse peut être effectuée par le maître, qui est garant de la vérité des propositions et des raisonnements retenus par les élèves.

Les conditions du débat, les critères pour admettre ou réfuter une proposition, sont appréhendés à ces occasions, ainsi que la nécessité de s'appuyer sur des connaissances mathématiques appropriées assurant la validité de ces propositions, c'est à dire apprendre à formuler des propriétés, à élaborer des preuves, à les critiquer et à en débattre dans le but d'établir la valeur de vérité d'une proposition.

b) La gestion des propositions et le rôle du professeur

Le rôle du maître est donc différent selon les phases de ces situations : dans certaines (formulation de propositions, débat en groupes ou collectifs) il organise le débat, dans d'autres (tri de ces propositions, synthèse) il peut effectuer des choix et apporter des conclusions, en rappelant des savoirs connus des élèves dans ces moments.

C'est en particulier, la distinction de ces différents rôles du maître dans le rapport à l'établissement de la vérité, et sa reconnaissance par les élèves, qui rend la gestion de ces situations plus particulièrement délicate. Nous analyserons plus précisément ces tâches dans les chapitres 4 et 5.

5. CONCLUSIONS

Cette présentation des problèmes et des preuves attendues doit être confrontée à une analyse :

- des processus de preuves produits : le chapitre 3 présente l'ensemble du dispositif expérimental et une analyse des types de preuve effectivement produits par les élèves.
- des conditions sur ces situations : le chapitre 4 traite des conséquences des organisations didactiques proposées sur les preuves produites, et aborde l'évolution de quelques situations au cours de cette expérimentation.

- des argumentations contribuant à l'élaboration de ces preuves : le chapitre 5 étudie, sur quelques exemples, les argumentations produites au sein des phases de mise en commun.

Chapitre 3 :
ANALYSE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX : PROCESSUS DE PREUVE PRODUITS

1. OBJET ET METHODES

1.1 Les questions abordées

Nous avons présenté au chapitre précédent un ensemble de problèmes et de situations didactiques dont le but était notamment de permettre le développement de processus de preuve.

Nous analyserons dans ce chapitre les preuves produites lors de la résolution de certains de ces problèmes ; ces productions portent, selon les situations expérimentées, sur :

- les résultats et les procédures élaborés par les élèves lors de la recherche pour des valeurs numériques particulières;
- les propositions formulées, notamment pour exprimer des solutions générales ;
- les justifications apportées à l'appui de ces propositions.

L'analyse des argumentations produites par les élèves lors de la critique de propositions sera abordée plus spécifiquement dans les deux chapitres suivants : d'une part au chapitre 4, pour comparer les effets des organisations didactiques sur les preuves produites, d'autre part, au chapitre 5 pour analyser les choix qui se posent à un enseignant lors de la gestion des phases de mises en commun.

1.2 Les outils d'analyse

Les cadres d'analyse relatifs aux situations didactiques et aux processus de preuve ont été exposés dans le chapitre 1, les procédures attendues ont été analysées au chapitre 2. Pour chacune de ces situations nous comparerons les résultats obtenus à ces analyses préalables en mettant en évidence les difficultés rencontrées par les élèves et les questions posées par la mise en œuvre de chacune des situations expérimentées.

Dans ce chapitre nous allons utiliser deux niveaux d'analyse. Le premier permet de décrire les procédures produites dans différentes classes, ainsi que les limites de certaines des situations expérimentées. Il était plus fiable d'utiliser, dans ce premier niveau, pour chacun des problèmes étudiés, des grilles d'analyse des procédures qui soient suffisamment précises pour rendre compte des compétences et des difficultés des élèves. Aussi pour chacun des problèmes, ces outils d'analyse sont en partie spécifiques et permettent de fait une confrontation avec ce qui a été décrit dans l'analyse préalable présentée au chapitre précédent.

Un second niveau d'analyse, s'appuyant sur une typologie des preuves qui soit commune à l'ensemble des problèmes, permet de comparer les procédures de preuves, les propositions produites et les justifications apportées dans différents problèmes. En particulier il permettra d'étudier les résultats d'un groupe d'élèves ayant été suivis pendant deux années.

1.3 Présentation du chapitre

Nous préciserons d'abord l'ensemble des expérimentations qui ont permis de recueillir des données (paragraphe 2).

Les productions propres à chaque problème seront ensuite analysées (ce qui constitue le premier niveau d'analyse au paragraphe 3).

Ensuite, après avoir explicité une nouvelle typologie, nous étudierons plus particulièrement les processus de preuve produits par un groupe de 21 élèves suivis sur deux années scolaires (deuxième niveau d'analyse au paragraphe 4).

Enfin nous établirons une synthèse portant sur les situations (paragraphe 5).

2. LES DONNÉES RECUEILLIES

2.1 Le contexte des séquences expérimentées

Les données ont été recueillies, sauf pour deux classes, dans le cadre de l'élaboration d'ingénierie didactique sur les apprentissages numériques, comme cela a été exposé précédemment.

L'élaboration de ces ingénieries didactiques a nécessité une expérimentation sur plusieurs années dans différentes classes. Pour un même problème, des modifications ont été apportées d'une année sur l'autre, en fonction des résultats obtenus, avant de proposer une organisation de la situation destinée à être utilisée par des enseignants de façon autonome.[11] L'effet de certaines des modifications apportées au cours de l'expérimentation sera étudié au chapitre 4.

Les situations présentées dans ce chapitre ont donc été expérimentées sur une période de trois années scolaires, dans des classes de CM1 ou de CM2 de deux écoles des Hauts-de-Seine :

- à l'école Anatole France à Gennevilliers située maintenant en ZEP qui concerne deux classes (celles d'Anita Jabier et de Denise Robert) entre 1994/1995 et 1996/1997 ;
- à l'école des Provinces Françaises à Nanterre (classes de Dominique Lhotellier), située en ZEP en 1995/1996 et en 1996/1997.

La contribution de ces situations à l'élaboration de l'ingénierie didactique n'était pas la même selon l'année de leur expérimentation :

1) en 1994/1995 au CM1 et en 1995/1996 au CM2, l'expérimentation portait sur des situations où les questions de preuve posées aux élèves et le déroulement prévu des phases de validation étaient dans des phases exploratoires de la recherche. En effet, un des buts de ces premières expérimentations était d'élaborer des problèmes de preuve et de repérer les preuves et les argumentations en mathématiques auxquelles pouvaient accéder des élèves du cycle 3. Nous avons vu au chapitre 1 que les travaux sur lesquels nous pouvions nous appuyer sur ce point et qui concernent l'enseignement primaire étaient limités, il était donc nécessaire d'expliciter dans un premier temps les capacités des élèves. Ces expérimentations concernent les classes numérotées de 1 à 4.

2) en 1995/1996 au CM1 et en 1996/1997 au CM2 (classes numérotées de 5 à 8), les preuves et argumentations en mathématiques que pouvaient produire

[11] Ces situations ont été publiées dans « Apprentissages numériques et résolution de problèmes » Equipe ERMEL INRP. (Hatier CM1 1997 et CM2 1999)

les élèves étaient mieux connues, les déroulements des situations plus stabilisés. Toutefois, nous verrons que pour certaines situations de preuve des incertitudes demeuraient.

Des expérimentations complémentaires ont été effectuées en 2004 au CM2 et en 2006 au CM1 alors que les documents présentant les situations avaient été publiés depuis plusieurs années.

Le rôle de l'enseignant, ses choix et ses initiatives dans la gestion de la situation se sont donc posés dans des termes différents :

1- dans les expérimentations menées la première année à chaque niveau (classes n° 1 à 4) où les potentialités des élèves du Cours Moyen dans le domaine de la preuve étaient en cours d'exploration, ce que les élèves pouvaient prendre en charge était à préciser, laissant une place plus grande à des initiatives dans le cours du déroulement de la situation, dont les effets n'étaient pas toujours connus ;

2- dans les expérimentations suivantes (classes n° 5 à 8) les conditions de la dévolution de la preuve étaient mieux connues, les choix pouvaient avoir des effets plus prévisibles.

Mais dans ces deux cas, l'organisation de la situation et la plupart des interventions du maître étaient effectués dans un contexte expérimental : elles étaient discutées avec les enseignantes et constituaient un choix commun.

Les expérimentations ont été menées dans des classes de maîtres formateurs excepté pour la situation *Cordes* qui a été aussi expérimentée en juin 2004 dans la classe d'une enseignante en début de carrière et a été conduite de façon autonome par cette enseignante sans intervention extérieure. Nous analyserons plus particulièrement cette situation au chapitre 5 où nous étudierons les questions posées par la gestion des mises en commun.

2.2 Les types de données recueillies

Selon le problème posé, les données analysées sont constituées par :

1- Les productions des élèves (résultats, procédures, propositions).

2- Les justifications élaborées par les élèves.

Pour ces données, les analyses présentées dans cette étude s'appuient sur les productions écrites, mais peuvent être complétées par des comptes-rendus de la séance établis juste après celle-ci par l'enseignante ou moi-même.

3- Les échanges oraux produits lors des mises en commun où les propositions sont débattues.

Plusieurs mises en commun ont été enregistrées, sous forme vidéo pour les classes n°1, 4, 7, 8, 9 et 10 [12]. A partir de certaines de ces vidéos mettant en évidence les potentialités des élèves et les organisations didactiques, des documents ont été montés pour pouvoir être utilisées en formation initiale ou continue. Mais pour être exploitables dans le contexte de cette étude, une transcription a été refaite à partir des enregistrements initiaux ; c'est le cas des situations *Somme et différence* (classes n°7 et 8), *Le plus grand produit* (classes n°1, 7 et 8 et partiellement classe n°10), *Cordes* (classe n°8 partiellement et classe n°9), *Somme des n premiers nombres* (classe n°7).

[12] Enregistrements réalisés pour les deux classes de Gennevilliers par Raymond Rocher, qui était alors CPAIEN en audiovisuel à Villeneuve-la-Garenne (92); qu'il en soit ici sincèrement remercié.

D'autres mises en commun ont été prises en note. Par ailleurs certains échanges au sein de groupes pour la production ou la critique de propositions ont été enregistrés en vidéo.

Récapitulatif des données utilisées

Les données utilisées dans cette étude concernent dix classes dans lesquelles une ou plusieurs situations ont fait l'objet d'une expérimentation, dix-neuf situations au total ; certaines situations, présentent, comme nous l'avons vu au chapitre 3, plusieurs problèmes de preuve.

Les données recueillies dans certaines classes sont plus particulièrement analysées dans ce chapitre ; elles concernent en particulier :

- les classes n° 5 (CM1 en 95/96) et n°6 (CM2 en 96/97) situées dans la même école à Nanterre, à une année d'intervalle et dans lesquelles 21 élèves appartenant à la première classe se retrouveront dans la deuxième, quelques élèves ne les ont pas suivis dans ce CM2, d'autres élèves les ont rejoint ;
- la classes n°7 (CM2) à Gennevilliers, dans laquelle plusieurs enregistrements vidéos de mises en commun ont été réalisés.

Les analyses s'appuieront, dans une moindre mesure, sur des productions ou des constats issus d'autres classes, mais qui seront à chaque fois spécifiés. Les données sont récapitulées par la liste ci-dessous (PLGP : *Le plus grand produit* ; S&D : *Somme et différence* ; SdN : *Somme des nombres de 1à n* ; 3NB : *Les trois nombres qui se suivent*).

Année scolaire 1994/1995 :			
1- CM1 (Gennevilliers)	PLGP	11/94	Enregistr. vidéo + productions
2- CM1 (Gennevilliers)	PLGP	21/10/94	Quelques productions
Année scolaire 1995/1996 :			
3- CM2 (Gennevilliers)	S&D	10/95	Compte-rendu
	PLGP	11/95	Productions + compte-rendu
	GOLF	7 et 9/11/95	Compte-rendu
4-CM2 (Gennevilliers)	S&D	10/95	Compte-rendu
5-CM1 (Nanterre)	3 NB	11/95	Productions + compte-rendu
	PLGP	6 et 7/5/96	Productions + compte-rendu
	Cordes	6/6/96	Productions
Année scolaire 1996/1997 :			
6-CM2 (Nanterre)	GOLF	5 et 7/11/96	Productions + compte-rendu
	S&D	18,19, 26/11	Productions + compte-rendu
7-CM2 (Gennevilliers)	S&D	1/10/96	Productions + compte-rendu
		4/10/96	Enregistr. vidéo + productions
	PLGP	27/2 et 3/3	Enregistr. vidéo + productions
	SdN	28/4/97	Enregistr. vidéo + productions
8-CM2 (Gennevilliers)	S&D	5/10/96	Enregistr. vidéo + productions
	Cordes	27/2/97	Enregistr. vidéo
	PLGP	24-28 /4/97	Enregistr. vidéo + productions
Année scolaire 2003-2004 :			
9-CM2 (Clichy)	Cordes	juin 04	Enregistr. vidéo + entretien
Année 2005-2006			
10-CM1 (Nanterre)	PLGP	mai 06	Enregistr. vidéo + entretien

3. PREMIERE ANALYSE DES PRODUCTIONS

Cette analyse porte dans un premier temps sur chacune des situations expérimentées, présentées dans l'ordre dans lequel les problèmes ont été exposés au chapitre précédent (problèmes de recherche de tous les possibles, problèmes à deux contraintes, problèmes d'optimisation, problèmes de dénombrement). Parmi ces problèmes, la plupart sont analysés dans ce chapitre ; d'autres (*La tirelire, La piscine, Somme des n premiers nombres)* ne le sont pas, soit parce que les processus de preuve produits par les élèves n'apportaient pas d'éléments nouveaux par rapport aux expérimentations analysées ici concernant un problème du même type, soit parce que les données recueillies ne présentaient pas le même degré de fiabilité.

Pour chacune des situations, l'analyse portera d'abord sur les procédures et, le cas échéant, les propositions produites, puis sur l'apport de cette expérimentation pour la connaissance des processus de preuve et la conception de situations de preuve.

3.1 Problème de recherche de toutes les possibilités : *Golf*

3.1.1 Présentation des séquences expérimentées

Cette situation propose un problème de recherche de toutes les possibilités. Elle a été expérimentée en début de CM2.

Les données relatives à ce problème ont été recueillies sur deux années

- en novembre 95 lors de la première expérimentation du problème de preuve, un bilan avait été rédigé (classe n°3) ;
- en novembre 96 (classe n° 5) les productions des élèves (résultats, procédures, propositions) ont été recueillies et analysées.

Dans une première phase, les élèves doivent atteindre 41 avec des 8 et des 3. La recherche est individuelle et est suivie d'une mise en commun qui a pour objectifs :

- de repérer les erreurs liées notamment au non respect des consignes ;
- de faire apparaître l'existence de solutions différentes et d'introduire la nécessité de regrouper, pour chaque réponse, les multiples de 3 d'une part, et les multiples de 8 d'autre part, pour formuler la réponse. La mise en commun a aussi pour but d'introduire l'écriture du résultat sous une forme multiplicative.

Dans la deuxième phase, les élèves cherchent individuellement toutes les solutions pour 97. Il y a quatre solutions : 11x8 + 3x3, 8x8 +11x3, 5x8 + 19x3, 2x8 + 27x3. Les élèves doivent accompagner leur solution d'une justification. Cette production est suivie d'une mise en commun.

Puis une nouvelle recherche pour 92 (atteindre 92 avec des 5 et des 3) est proposée ; ces nombres permettent des calculs, notamment multiplicatifs, rendus plus faciles par la présence du 5. Il y 6 solutions : 16x5 + 4x3 ; 13x5 + 9x3 ; 10x5 + 14x3 ; 7x5+ 19x3 ; 4x5 + 24x3 ; 1x5 + 29x3.

3.1.2 Une première expérimentation au CM2

Nous présentons cette expérimentation en raison d'une question apparue : la compréhension du terme « méthode ».

Cette expérimentation a eu lieu dans la classe n° 3, à Gennevilliers, les 7 et 9 novembre 1995.

Les objectifs de la situation étaient :

- de gérer des procédures par essais pour trouver toutes les solutions sans répétition ni oubli ;
- d'apporter la preuve qu'une méthode permet d'avoir toutes les solutions ;
- de formuler une méthode s'appliquant à n'importe quel nombre.

a) Première séance : production de plusieurs solutions

Sur les vingt-cinq élèves, un seul utilise la forme multiplicative pour présenter ses résultats ; une seule élève formule la réponse en termes de nombre de 3 et de 8. La plupart des élèves n'interprètent pas des calculs du type 8 + 8 + 8 + 8 + 3 + 3 + 3 et 8 + 3 + 8 + 3 + 8 + 3 + 8 comme étant la même solution. C'est lors de la mise en commun que ce point a été élucidé. Une élève explicite une méthode pour chercher (« le plus proche de 41 c'est 5x8, mais je ne peux pas mettre de 3, alors j'ai essayé avec 4x8… »).

Puis la recherche est reprise pour 97, avec un recours plus important à la multiplication. Dans cette classe, la multiplication est utilisée par certains élèves pour la production des solutions, mais l'interprétation des écritures additives doit faire l'objet d'une relance de la part de l'enseignante (« vous allez écrire une phrase pour indiquer combien de 8 et de 3 vous avez utilisé »), destinée aux élèves ne formulant pas leurs réponses en nombre de 3 et nombre de 8. Cette relance est suivie d'un bilan sur les solutions produites portant sur l'interprétation des écritures et non sur l'exhaustivité des solutions.

Trois solutions ont été trouvées 11x8 + 3x3, 8x8 +11x3, 2x8 + 27x3.

b) Deuxième séance : recherche de toutes les solutions

Le problème de preuve est proposé deux jours après avec les valeurs : $c = 92$, $a = 3$ et $b = 5$, et la consigne suivante : « Il faut faire 92 avec des 5 et des 3. Vous allez chercher une méthode qui permette d'avoir toutes les solutions. Vous expliquerez votre méthode et vous direz pourquoi vous êtes sûrs d'avoir toutes les solutions.»

Les élèves respectent les contraintes (utilisation de 5 et de 3) et la plupart trouvent plusieurs solutions, mais aucun ne trouve les 6 solutions.

c) Une interrogation posée sur la signification du terme « méthode » pour les élèves

La méthode attendue consistait à identifier une variable (le nombre de 3 ou le nombre de 5) et la faire croître ou décroître, en complétant avec des multiples de l'autre nombre.

Ce terme « méthode » a posé des difficultés : il n'est pas bien compris par les élèves. Dans son propre bilan, l'enseignante conclut : « Il serait judicieux de la [*la consigne*] formuler en deux temps : 1) la recherche des solutions et pourquoi pas en fixant le but à atteindre [*le nombre de solutions*] et 2) réfléchir à la méthode ».

Elle ajoute : « collectivement, on arrive à des constats intéressants et à une formulation générale, mais comment mesurer ce que cette situation apporte à chacun au plan de la généralisation ? »

Dans cette conclusion de l'enseignante, plusieurs interrogations s'expriment.

Premièrement, dans un problème de recherche de toutes les possibilités, est-il judicieux d'indiquer le nombre de solutions (ce que l'enseignante formule comme « le but à atteindre »)? Sur cette question, d'autres expérimentations ont fait apparaître que, dans des problèmes de recherche de toutes les solutions, l'indication par l'enseignant, en cours de recherche, du nombre de solutions à atteindre, modifie les procédures. Les élèves essayaient alors de produire, voire de « deviner » de nouvelles solutions, jusqu'à obtenir le bon nombre de solutions sans toujours s'assurer qu'elles étaient vraiment nouvelles et parfois sans vérifier si les contraintes du problème sont respectées ; de plus les tentatives d'organisation des solutions déjà produites, pour pouvoir les compléter, sont moins exploitées.

Un constat assez empirique est donc que cette intervention du maître, l'indication du nombre total de solutions, n'est stimulante pour la recherche, sans être contradictoire avec les objectifs d'organisation méthodologique, que lorsque très peu de solutions n'ont pas encore été trouvées. Si les élèves peuvent avoir encore à prouver que toutes les solutions ont été produites, l'incertitude sur leur nombre, et les contradictions entre les élèves pouvant en résulter, ne constituent plus des moteurs de la recherche.

Mais, plus largement, nous avons constaté que ce terme de méthode pouvait avoir, en début d'année, plusieurs significations pour les élèves :

- un comportement général (chercher, réfléchir),
- une organisation de la tâche (rédiger, relire),
- un recours à une technique de calcul (addition, multiplication),
- la planification de questions intermédiaires ou la recherche de données utiles, comme dans des problèmes complexes, ou même en référence à ce qui peut être demandé dans d'autres disciplines, mais où les étapes sont alors explicitées.

Rappelons que pour nous, au cycle 3, apprendre à chercher peut signifier apprendre à gérer des procédures par essais, à émettre et éprouver des hypothèses, mais non à apprendre une « méthodologie » générale, un plan de travail qui s'appliquerait à tous les problèmes.

Ces constats nous ont incité à éviter cette terminologie dans les questions de preuve. Aussi lors de l'expérimentation de cette situation GOLF, conduite l'année suivante dans un CM2, la consigne évite le terme de méthode, même si cette question de l'articulation entre des enjeux relatifs à la résolution de problèmes et ceux relatifs aux processus de preuve continuera à se poser au travers des demandes de formulations visant des expressions plus générales qu'une liste de solutions.

3.1.3 Deuxième expérimentation au CM2

Cette situation a été reproposée l'année suivante (classe n°6, Nanterre, 5 et 7 novembre 1996). Dans une première phase, les élèves résolvent le problème pour les valeurs 41, 3 et 8 puis 97, 3 et 8 et enfin pour 92, 3 et 5.

a) Recherche des différentes solutions pour $a = 3$, $b = 8$, $c = 97$

Les résultats

Ils portent sur le nombre de solutions différentes produites, qui est de :

- 0 solution : 5 élèves,
- 1 solution : 7 élèves,
- 2 solutions différentes : 11 élèves,
- 3 solutions différentes : 1 élève,
- 4 solutions différentes : 1 élève.

La formulation des solutions en nombre de 3 et de 8 est produite par tous les élèves qui proposent plus d'une solution.

Les procédures

Les principales procédures sont :

- des cumuls additifs de 3 et de 8 sans organisation particulière (codé CA, cumul additif) (Khady) ;

- des cumuls additifs de 3 et de 8 avec une organisation (code CO, cumul organisé) :
    - une association de un 8 et de un 3, puis des ajustements (Angélique) ;
    - un cumul de 3 (ou de 8) suivi d'un cumul de 8 (ou de 3) avec des ajustements éventuels au voisinage de 97 (Ahmed, Brahim, Jennifer, Kader, Laetitia, Linda, Mehdi, Nicolas, Sabrina, Sarah, Sofian) ;
    - des alternances de plusieurs 8 et de plusieurs 3 (Georges);
    - un élève (Ahmed) réduit les calculs en ajoutant non pas des 3 mais des 9 en écrivant au-dessus de chaque 9 successif combien de 3 sont comptés au total ;

- des procédures partiellement multiplicatives (avec un point de départ un multiple de 8, ou de 3, puis ajout réitéré de l'autre nombre) (code AM, addition de multiples) (Jonathan) ;

- des procédures multiplicatives (code M):
    - une élève (Betty) écrit simplement le nombre de 3 ou de 8 essayés (par exemple 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27) pour la solution 27x3 + 8x2 où à partir de chaque multiple de 3 elle essayait d'atteindre 97 en complétant avec un multiple de 8 ;
    - le recours à des multiples en prenant comme point de départ un multiple de 10 (3x30, puis 3x 29 ou 20x3, puis 22x3) (Bruno);
    - la somme de deux multiples (Carole) ;
    - l'ajout de 8 à un multiple de 3 (Malika) ;

- l'écriture seule des résultats sous forme multiplicative (code RS, résultat seul) (Aurélie, Hichem, Jenny, Julien) ;

- l'utilisation d'autres nombres que 8, 3, ou leurs multiples (code AN, autres nombres) (Kevin, Mélanie).

Les principales difficultés

Ce sont :

- des erreurs dans le recomptage du nombre de 3 ou de 8 ; une solution annoncée bonne est en fait erronée (Georges) ;

- des erreurs de calculs conduisant à la somme (Nicolas, Kader) ;
- l'oubli des contraintes et l'utilisation d'autres nombres (Mélanie, Kevin).

Beaucoup d'élèves ne repèrent pas des répétitions de deux solutions présentant le même nombre de 3 et de 8 mais écrits dans un ordre différent.

b) Reprise pour les valeurs *a*= 3, *b*= 5, *c*= 92

Le problème a été reproposé le surlendemain avec de nouvelles valeurs numériques : atteindre 92 avec des 5 et des 3.

Les élèves travaillaient par binôme ; en effet, nous avions constaté plusieurs fois que dans cette école, où les élèves ont plus particulièrement des difficultés à s'exprimer en mathématiques, il est souvent utile de les placer en binôme lorsque la production demandée doit comporter une formulation écrite. Cette remarque concerne plus particulièrement les classes n°5 et n°6 (ici les binômes sont principalement constitués par les voisins).

Le nombre de solutions différentes :
- 1 solution : 2 binômes ;
- 2 solutions différentes : 4 binômes et un élève ;
- 3 solutions différentes : 2 binômes ;
- 4 solutions différentes : 1 binôme ;
- 5 solutions différentes : 1 binôme ;
- 6 solutions différentes : 2 binômes.

Toutes les solutions sont écrites sous une forme multiplicative (xx3 + yx5).

Les justifications apportées se limitent en général à la description des calculs effectués, excepté pour les binômes qui ont trouvé les 6 solutions (cf. ci-dessous).

Les procédures produites

Les principales procédures sont :
- Essais de couples de multiples (Ahmed et Malika, Aurélie et Sofian ; Hichem et Sanah ; Jenny et Medhi; Linda et Sabrina ; Nicolas et Julien ; Brahim et Carole) (procédure M). Parmi celles-ci, certaines procédures présentent des essais plus organisés :
  - Essais systématiques de tous les multiples de 5 (procédure codée M5), puis tentatives de compléments avec des multiples de 3 (Jennifer et Bruno).
  - Même procédure mais avec échange de 3x5 contre 5x3 (code ME, échange de multiples) (Betty et Kader).
- Cumuls additifs (CA) (Laetitia, Kevin) .
- Autres cumuls additifs à partir d'un multiple de 5 ou de 3 (AM) (Angélique et Georges ; Jonathan).
- Résultat seul sans procédure de calcul (RS) qui correspond à une seule solution produite (Khady et Mélanie).

Productions des binômes ayant trouvé les 6 solutions

Deux binômes ont trouvé les 6 solutions.

L'un d'entre eux (Betty et Kader) a produit dans l'ordre :

1^{e} solution : (16x5) + (4x3) = 92
2^{e} solution : (10x5) + (14x3) = 92
3^{e} solution : (13x5) + (9x3) = 92

Ils ont indiqué dans la marge entre la 3^{e} et la 4^{e} solution le nombre de 5 et le nombre de 3 utilisés : « 16, 13, 10 » et en dessous « 14, 9, 4, 19, 24, 29 ».

4^{e} solution : (7x5) + (19x3) = 92
5^{e} solution : (24x3) + (4x5) = 92
6^{e} solution : (29x3) + (1x5) = 92

La justification formulée par ce binôme est : « il y a 3 chiffres d'intervalle entre les sommes de 5 et 5 chiffres d'intervalle entre les sommes de 3. Au début nous avons soustrait les intervalles mais quand nous arrivons trop loin nous avons additionné le nombre de départ et nous avons arrêté à la 6^{e} solution parce que nous avons trouvé 1 fois 5 et nous n'avons pas pu aller plus loin ».

L'autre binôme (Bruno et Jennifer) ayant trouvé les 6 solutions a commencé par calculer, 1x8, 2x8, 3x8, 4x8, puis il a ajouté des multiples de 3 pour atteindre 92. A partir du calcul (4x8) + (2x30) = 92, ils produisent de nouveaux calculs mais, cette fois, par nombre de 5 croissant en commençant par (3x29) + (1x5) = 92, puis essayent systématiquement 2x5, 3x5, 4x5, 5x5… jusqu'à 19x5 et en écrivant à chaque fois les solutions comme somme de multiples, par exemple (4x5) + (3x24) = 92… et concluant : « il y en a 6. On a fait avec des 5 et après on a rajouté les 3 ».

Deux groupes ayant produit toutes les solutions, la preuve de l'exhaustivité consiste en l'explicitation des moyens employés pour produire toutes les solutions.

c) Bilan sur cette expérimentation

Dans cette classe, cette situation a permis principalement :

- la production de plusieurs solutions et la prise en charge par les élèves de cet enjeu ;
- la mise en place de procédures par essais et leur évolution vers des essais de multiples, avec une organisation par certains élèves en fonction du nombre de 5 ou de 3.

Récapitulatif des résultats

Le tableau suivant propose une comparaison des productions individuelles et par binôme (classe n°5).

Les premières colonnes concernent les productions individuelles des élèves ; ceux-ci sont regroupés selon les binômes constitués à la séance suivante.

Tableau 3.1 *Golf* (novembre 1996, Nanterre)

	Résolution individuelle 97, 8, 3 5/11/96			Résolution par binôme 92,5,3 7/11/96	
	Nombre de solutions (4 au total)	Procédure	Type de réponse	Nombre de solutions (6 au total)	Procédure
BETTY	4	M	multiplicatives	6	M E
KADER	1	CO	multiplicatives		
BRUNO	3	M	multiplicatives	6	M 5
JENNIFER	2	CO	multiplicatives		
NICOLAS	2	CO	additions et multiplications	5	M
JULIEN	1	RS			
JENNY	2	RS	multiplicatives	4	M
MEHDI	1	CO	addition		
AHMED	2	CO	multiplicatives	3	M
MALIKA	1	M	multiplicative		
SOFIAN	1	CO	addition	3	M
AURELIE	2	RS			
LINDA	2	CO	multiplicatives	2	M
SABRINA	1	CO	addition		
JONATHAN	2	AM	multiplicatives	2	A
KEVIN	0	AN		2	AM
LAETITIA	2	CO	multiplicatives		
BRAHIM	2	CO	multiplicatives	2	M
CAROLE H	1	M	multiplicatives		
HICHEM	2	RS	multiplicatives	2	M
SARAH	2	CO			
ANGELIQUE	0	CO	addition	1	AM
GEORGES	0	CO			
MELANIE	0	AN		1	RS
KHADY	0	CA			

Colonnes 3 et 6 : Procédures
- RS Résultat seul
- AN Recours à d'autres nombres pour atteindre *c* que des sommes de *a* ou de *b*
- CA Cumul additif
- CO Cumul additif organisé
- AM Addition à partir d'un multiple de *a* ou de *b*
- M Essai de multiples
- M5 Essai de multiples de 5
- ME Essais de multiple avec des échanges 5x3 et 3x5

d) Evolution des productions dans cette classe

Rappelons d'abord que si dans le dernier problème la valeur de *c (*5 au lieu de 8) facilite les calculs, le nombre de solutions est aussi plus grand (6 au lieu de 4). L'évolution peut être analysée selon trois critères : le nombre de solutions trouvées, leur formulation et les procédures.

1) Le nombre de solutions différentes augmente, mais il reste faible pour certains binômes, en relation avec les difficultés liées à la mise en place et à la gestion de procédures par essais.

2) Les solutions sont formulées par les élèves sous une forme multiplicative pour le second problème. Cette évolution fait suite à la présentation des solutions du premier problème.

3) Les procédures ont, quant à elles nettement évolué :

- les procédures basées sur des essais de couples de multiples (Procédures M, ME, M5) sont passées de 16% (4 sur 25) à 69% (9 sur 13) ;
- des procédures plus performantes (ME et M5), facilitées par le choix de 5 permettent la production de toutes les solutions ;
- l'abandon des cumuls additifs, qui nécessitaient un double bilan sur le total, atteint ou non, puis sur le nombre de *a* et de *b* utilisés ; ce double calcul additif, portant sur des écritures assez longues étant souvent source d'erreur.

Il est difficile d'appréhender l'effet de l'organisation du travail par binôme, relativement aux autres facteurs cités (changement de certaines variables, meilleure compréhension du problème, réinvestissement de procédures ou amélioration de ses propres procédures liée à une conduite plus organisée des essais). Nous pouvons toutefois remarquer que tous les binômes où un des élèves avait produit une procédure de type essai de multiples (M), cette procédure a été conservée dans le deuxième problème.

3.1.4 Bilan sur cette situation

Cette situation a pour but de donner à la fois aux élèves confiance dans leurs propres capacités de recherche et de leur permettre d'appréhender les initiatives à prendre dans ce type de travail. Cette situation met en évidence la difficulté que rencontrent certains élèves à résoudre un problème de production de plusieurs solutions.

Relativement à la thématique de la preuve en mathématique, cette situation est la première situation de preuve proposée au CM2. Elle sensibilise les élèves à la question de la recherche de toutes les solutions à partir de la production d'essais de couples de nombres et nous avons fait le constat que la gestion des essais s'y améliore sensiblement. La preuve de l'exhaustivité étant apportée par l'explication des productions des groupes ayant trouvé toutes les solutions, les procédures de preuve s'appuient donc essentiellement sur le repérage de solutions identiques puis la réorganisation des résultats selon un nombre croissant de *a* ou de *b* et aussi de l'échange de *a* termes *b* contre *b* termes *a.*

Nous avons vu aussi, qu'une demande de formulation en termes de méthode pour trouver toutes les solutions ne garantit pas la production d'une preuve. L'intérêt de cette expérimentation a été de mettre en évidence la distinction entre la production de solutions et la preuve que l'on a toutes les solutions.

Aussi les justifications posées dans les problèmes suivants visent plutôt la formulation, non pas d'une méthode, mais de propositions dont la valeur de vérité pourra être établie.

3.2 Les trois nombres qui se suivent

Cette situation se compose de trois problèmes. Après la résolution d'un premier problème : chercher trois nombres qui se suivent dont la somme est donnée, deux problèmes de preuve sont proposés :

- prouver l'impossibilité de trouver une solution pour certaines valeurs de la somme (ici 25) ;

- déterminer les conditions d'existence d'une solution : « comment savoir si un nombre est la somme de trois nombres qui se suivent ? ».

Cette situation a été expérimentée dans plusieurs classes sous la forme de ces trois problèmes successifs. Nous présentons ici les résultats produits dans un CM1.

3.2.1 Prouver une impossibilité : Propositions produites

Cette expérimentation s'est déroulée dans la classe n° 5 (Nanterre), le 6/11/95 pour la recherche pour des valeurs admettant une solution (premier problème), le 7/11 pour la résolution du problème d'impossibilité, et les 16 et 23/11 pour la production d'une justification. Dans cette classe 21 élèves se retrouveront dans le CM2 (classe n°6) cité en premier dans la présentation de l'expérimentation précédente (*Golf*).

Les données analysées pour cette classe sont ici constituées par les productions relatives au deuxième problème (preuve de l'impossibilité) et au troisième (recherche de toutes les solutions), ainsi que par une chronique de la mise en commun de ce dernier problème.

Préalablement, dans le premier problème qui ne présente pas d'enjeu de preuve, la recherche porte sur des valeurs de la somme pour lesquelles une solution existe, les sommes proposées sont 96 puis 354. La validation s'est effectuée lors de mises en commun où les résultats ont été confrontés aux deux contraintes de l'énoncé (les trois nombres se suivent et leur somme est bien celle visée) et où les méthodes ont été comparées en fonction de leur efficacité, notamment du nombre des essais.

Les élèves ont eu, le lendemain, à prouver l'impossibilité de trouver trois nombres qui se suivent dont la somme est 25. Une fois que les élèves ont cherché une solution et constaté qu'il n'est pas possible de trouver une solution pour 25, les élèves ont eu à répondre individuellement et par écrit, à la question : "Pourquoi n'y a-t-il pas de solution pour 25 ?".

Les résultats de cette classe sont présentés avec ceux du problème de recherche de toutes les solutions effectuée pour le troisième problème (voir tableau 3.2 ci-dessous) ; les productions individuelles (procédures et propositions) figurent à l'annexe n°1.

a) Les principales procédures

Les principales procédures sont :

- des calculs additifs ne respectant pas l'une ou l'autre des deux contraintes, par exemple essayant d'atteindre la somme avec deux nombres au lieu de trois (code AN) ;
- des sommes de nombres privilégiant une décomposition de la somme en trois nombres qui ne se suivent pas (code TA) ;
- des essais de triplets de nombres qui se suivent :
    - autres que 7+8+9 et 8+9+10 (code TR, triplets successifs) ;
    - comprenant 7+8+9 ou 8+9+10 mais pas les deux (code TSE, essai de triplets sans encadrement) ;
    - comprenant 7+8+9 et 8+9+10 éventuellement suivis d'autres essais (croissants ou décroissants ou au voisinage de 25) (code TE, triplets avec encadrement) ;
- une absence de calcul apparent (code RS : ici proposition seule).

Certains élèves écrivent un calcul ne prenant pas en compte toutes les contraintes (Angélique, Julien), mais formulent une proposition correcte.

Les difficultés

Aux difficultés déjà citées sur la mise en œuvre de procédures par essais, s'ajoutent d'autres spécifiques liées aux recherches effectuées lors du précédent problème (trouver trois nombres qui se suivent dont la somme est 96 ou 354), par exemple :

- Mélanie cherche a atteindre 25 en additionnant des triplets de nombres qui se suivent plus grands que 10 (10+11+12,…), choix influencé probablement, par le fait que les différents nombres proposés auparavant étaient supérieurs à 30, et donc que les nombres qui étaient solutions étaient supérieurs à 10 ; ce qui est aussi le cas d'Ahmed, mais cet élève n'était pas présent la veille pour la recherche pour les premières valeurs qui admettent une solution et il découvre le problème pour cette étude de l'impossibilité.
- Linda, après deux essais avec des triplets trop grands, produit des additions en ajoutant 25 à d'autres nombres.

b) L'analyse des justifications

Les principales justifications produites par les élèves sont :

- impossible sans justification : 3 élèves (Betty, Karim, Mélanie),
- impossible parce que l'on ne peut pas : 1 élève (Sofian),
- impossible car 25 est un nombre impair : 1 élève (Carole),
- impossible avec d'autres justifications erronées : 1 élève, (Ahmed),
- justification incomplète : « 7+8+9 trop petit » : 1 élève (Nicolas),
- justification correcte : « 7+8+9 trop petit, 8+9+10 trop grand » : 14 élèves avec des différences de formulation, dont 3 avec des difficultés de formulation ;
- autre justification (éventuellement complémentaire) : « c'est possible si on met deux nombres ».

Certains élèves associent différentes justifications comme Jennifer : « on peut faire 7+8+9 = 24 ça fera trop bas. On peut faire 8+9+10 = 27, ça fera trop haut. On peut essayer de faire toutes les opérations que l'on veut, ça ne réussira jamais, parce que ce n'est pas un nombre impair (sic)».

<u>3.2.2 Recherche de toutes les solutions</u>

Le problème posé est de déterminer quels sont les nombres qui sont la somme de trois nombres qui se suivent.

La question a été posée dans ce CM1 juste après la phase établissant l'impossibilité pour 25 (dans la même séance) après un bref rappel des recherches des séances antérieures. La question posée est : "Quels sont les nombres qui sont la somme de trois nombres qui se suivent ?", puis les élèves n'apportant que quelques réponses l'enseignante demande "Quels sont ceux qui ont écrit une phrase ?". Des élèves répondent :

- « si la maîtresse donne 39, on peut » (Kader);
- « on ne peut pas faire 5 et 25 » (Nicolas);

- « on ne peut pas trouver 25 parce que ça fait plus un ou moins un » (Malika).

La question est alors précisée pour un domaine entre 50 et 100. Une liste de solutions est produite, puis en réponse à la question : « Comment savoir si on a toutes les solutions ? », une élève (Betty) propose « du plus petit au plus grand ». Le tableau étant partagé en deux colonnes les nombres qui sont la somme de trois nombres qui se suivent sont inscrits dans la première, les autres dans la seconde.

Première colonne : 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

Deuxième colonne : 52, 53.

A la question « Est-ce qu'on les a tous? » Julien exprime : « il manque 78, on voit qu'on rajoute, on compte de 3 en 3 »

Au constat de l'enseignante « Vous n'avez pas répondu à la question de départ : Comment savoir …? Comment avez-vous fait ? Vous prenez 3 nombres et vous cherchiez le total. Si je vous donne le nombre 47, est-ce que vous avez un moyen pour me dire tout de suite qu'il est la somme de trois nombres ? » Julien apporte la réponse : « on a trouvé que ça va de 3 en 3 ».

La dernière question avant la fin de la séance est : « Les solutions vont de trois en trois pourquoi ? Donner un nombre qui ne soit pas solution » ; Carole propose 58.

On voit ici qu'un choix se pose entre deux problèmes : trouver une liste de nombres qui sont solutions et expliciter une propriété commune aux solutions.

Reprise du problème

Une relance a été effectuée la semaine suivante (séance du 23/11) : les élèves ont à répondre par écrit à la question « Comment savoir si un nombre est la somme de trois nombres qui se suivent ?».

Les différentes relances, dont « Est-ce qu'il y a un moyen de trouver [les solutions] plus rapidement ? » n'entraînent pas de modifications dans les propositions des élèves qui sont alors centrées sur la production de toutes les solutions entre 50 et 100.

Les réponses écrites individuelles à la question suivante « Pourquoi ça augmente de 3 ?» sont :

- la description du calcul :
  - on prend trois nombres, on les additionne et on voit si cela fait le nombre,
  - on compte ;
- l'explicitation « on compte de 3 en 3 » ou « ça va de 3 en 3 » (Aurélie).

Les autres réponses étant des listes de nombres.

Les échanges qui suivent amènent à préciser et à justifier ces formulations :

- « Parce que les résultats sont dans la graduation de 3 en 3. A chaque fois on ajoute 3 » (Ahmed) ;
- Betty : on ajoute toujours 3

16	+	17	+	18
+1		+1		+1
17	+	18	+	19

- « en 3^e position, le nombre est toujours plus grand que les autres » (Julien) ;
- « 15+16+17 se retrouvent en ligne et en colonne », les solutions 48 = 15+16+17, 51 = 16+17+18 étant écrites les unes au-dessous des autres :

48 = 15 + 16 + 17
51 = 16 + 1 7 +18
54 = 17 + 18 + 19

- « entre 16 et 19, il y a 3 » (Bruno qui compare les nombres qui changent entre les triplets 16, 17, 18 et 17, 18, 19).

Cette mise en commun a été suivie d'une synthèse : on propose alors d'écrire toutes les solutions « en remontant » à partir de 48 (48 = 3x16, 45 = 3x15,… jusqu'à 3 = 3x1) ; alors seulement, la relation est faite avec les multiples de 3. A la question l'enseignante : « Qu'est-ce que vous savez de nouveau ? », les réponses ont été :

- les solutions vont de 3 en 3 ;
- les solutions sont des multiples de 3 ;
- 3 fois celui du milieu.

Les justifications produites sont donc essentiellement basées sur :

- les simples constats d'une régularité (les solutions vont de 3 en 3) ;
- les justifications de ces constats : pour trouver la solution suivante :
    - on ajoute 1 à chacun des 3 nombres qui se suivent ;
    - pour obtenir le triplet suivant on enlève le premier nombre du triplet on le remplace par ce nombre plus 3 pour obtenir la solution suivante (les deux autres nombres ne changent pas) : cette preuve peut prendre la forme d'un exemple générique (en décrivant ce processus sur un exemple);
    - la solution est « trois fois le milieu » ;
    - et pour les premières solutions « c'est la table des 3 ».

3.2.3 Récapitulatif de l'expérimentation dans cette classe

Les résultats des deux expérimentations dans cette classe sont résumés dans le tableau ci- dessous. Il s'agit de productions individuelles.

Tableau 3.2 (Trois nombres qui se suivent, novembre 1995, Nanterre)

	7/11/95	7/11/95	23/11/95
	Procédure de preuve pour l'impossibilité 25	"Je dis pourquoi il n'y a pas de solution pour 25"	"Comment savoir si un nombre est la somme de 3 nombres qui se suivent"
AHMED	TR	5	1
ANGELIQUE	RS	2	0
AURELIE	RS	1	1+2V
BETTY	TE	3	1-
BRAHIM	RS	1	1-
BRUNO	TE	1	1
CAROLE	TE	4 i+4p	1
JENNIFER	TE	1+(4p)	5
JENNY	TSE	1	5
JONATHAN	TE	1	1+2F
JULIEN	TE	1	1
KADER	RS	2	2F
KARIM	TE	1-	4
LAETITIA	TE	1	5
LINDA	AN	1	6
MALIKA	TR	1-	4
MEHDI	TR	1	4
MELANIE	TR		6
NICOLAS	TE	1-	0
SABRINA	TSE	1	6
SARAH	RS	1-	3+2V+6
SOFIAN	TE	5	4

Explicitation du codage

Deuxième colonne

AN autres sommes que des triplets
RS résultat seul
TR essai de triplets
TE essais de triplets comprenant 7,8,9 et 8,9,10
TSE essai de triplets comprenant 7,8,9 ou 8,9,10

Troisième colonne

1 : encadrement 7+8+9 trop petit , 8+9+10 trop grand,
1- : encadrement formulé moins précisément
2 : solution 1 incomplète (7+8+9 trop petit , 8+9+10 trop grand)
3 : recours à des exemples
4 i : impossible car impair,
4p : impossible car 25 est trop petit
4 : impossible mais autre justification erronée,
5 : impossible car on ne peut pas, ou formulation de l'impossibilité sans justification précisée,

Quatrième colonne:

0 : non réponse,
1 : « ça va, on fait, de 3 en 3 »,
2 : 2V ou 2F : donne un exemple juste ou faux,
4 : « on compte, on calcule… »
5 : « on choisit 3 nombres qui se suivent, »
6 : explications confuses: « on compte les unités … »

3.2.4 Bilan sur cette situation

a) Comparaison entre les résultats attendus et les productions

Si les procédures permettant d'apporter la preuve de l'impossibilité ne sont pas différentes de ce qui était attendu, le problème de recherche de toutes les solutions, permet de dégager des interrogations relatives aux variables de la situation.

Une première remarque porte sur la donnée ou non d'un domaine numérique dans lequel les élèves ont à produire les solutions : « trouver les nombres en 50 et 100 qui sont la somme de trois nombres qui se suivent » plutôt que « chercher les nombres qui sont la somme de trois nombres qui se suivent ». Dans le premier cas, ce qui a été observé dans cette classe, mais aussi dans d'autres, les solutions seront constituées, par une liste, organisée ou non, de nombres et non par la formulation d'une propriété commune. La preuve de l'exhaustivité relève alors d'une vérification que toutes les valeurs intermédiaires ont été produites, preuve basée sur une variation régulière, assez semblable à celle développée dans le problème *Golf*. Ensuite les élèves ne comprennent pas toujours la demande d'une formulation plus générale, autre que « cela va de trois en trois ».

Dans le cas où aucun champ numérique n'est proposé pour les solutions à trouver, nous avons pu constater que la production d'une formulation générale n'en est pas facilitée pour autant au CM1 et la comparaison des solutions est rendue plus difficile encore de par la diversité des nombres choisis par chaque élève. La production d'une solution générale s'appuie alors sur des propositions comme « cela va de trois en trois », ou « c'est trois fois celui du milieu ».

Donc en fait, c'est la conception même de la situation, et non sa mise en œuvre, qui ne permet pas de produire les preuves attendues. En effet, compte tenu des expériences citées précédemment, nous voyons que la production d'une liste de nombres ne centre sur pas sur la preuve que toutes les solutions ont été produites, mais de fait se limite à vérifier que l'écart entre les nombres, une fois ceux-ci réordonnés va de trois en trois. Du point de vue de la preuve, cette troisième phase est, au CM1, moins intéressante que la précédente qui permet de traiter le rapport entre la justification et la propriété. Soit on propose un domaine numérique et il n'y a pas de formulation générale systématique, soit on propose un problème de preuve spécifique (pourquoi cela va de trois en trois) mais il n'est pas certain que l'enjeu soit suffisant.

Une autre possibilité serait de demander aux élèves, en travaillant par équipe, de se mettre d'accord sur une règle, qui leur permette dès qu'on leur propose un nombre de dire s'il est la somme de trois nombres qui se suivent ou non.

b) Preuve et connaissances : une propriété encore incertaine au CM1

Ce dernier problème de preuve de la situation *Les trois nombres qui se suivent* a permis d'organiser la production de solutions et de contrôler cette organisation. Mais le fait que les solutions sont des multiples de 3 n'est pas formulé par les élèves au cours de la recherche.

Demander aux élèves de formuler une propriété générale suppose que les connaissances sur les multiples aient été suffisamment travaillées pour qu'elles soient disponibles. D'autant que sur ce problème, les élèves n'ont pas, contrairement à ce qui se passe pour certains apprentissages notionnels, de conception préalable de la solution qui constituerait un obstacle et permettrait une rétroaction.

Les reformulations ne permettent pas à tous les élèves de se dégager de la liste de solutions ou d'une description du processus (« ça va de 3 en 3 »). Aussi ils ne comprennent pas toujours l'intérêt de formulation à partir d'une propriété des nombres concernés (« ce sont les multiples de 3 ») et non à partir d'une relation qui permet de produire ces nombres (« ça va de trois en trois »).

Cette situation permet donc de mettre en évidence cette propriété (« ce sont les multiples de 3 ») ; si le maître ne la formule pas dans la phase de synthèse les échanges sous forme d'une mise en commun risquent de devenir trop longs et de perdre leur enjeu pour les élèves. Par contre cette propriété est énoncée assez aisément au CM2, ce que nous avons constaté en proposant cette situation dans la classe n° 7, la référence aux multiples de 3, une fois énoncée devient une évidence pour les élèves, ce qui réduit fortement l'enjeu de preuve.

La rédaction définitive de la situation pour les enseignants de CM1 (cf. ERMEL CM1 1997 édition 2005 p 66) propose, pour cette troisième phase de répondre à la question suivante : « On a vu qu'il n'est pas possible de trouver trois nombres qui se suivent dont la somme est 25. Comment savoir si un nombre est la somme de trois nombres qui se suivent ? ». Dans une première étape, après la production individuelle ou par groupe, selon les formes de travail souhaitées par l'enseignant, une mise en commun a pour but de permettre la formulation de propositions en dépassant la production de solutions individuelles. Le maître peut ensuite demander si l'on saurait fournir directement (ou reconnaître) un nombre qui soit la somme de trois nombres qui se suivent en proposant éventuellement un nombre : « Est-ce que 92 est la somme de trois nombres qui se suivent ? ». Dans la rédaction définitive de la situation, nous avons donc abandonné la suggestion de chercher des valeurs dans un champ numérique donné.

c) Les objectifs de ces trois problèmes et les critères différents de validation

Les trois problèmes de cette situation « Les trois nombres qui se suivent » diffèrent par leurs objectifs; ceux-ci sont relatifs :

- au développement de méthodes pour le premier (gérer des essais de calcul) comme dans le problème GOLF ;
- à l'établissement et la critique de preuves pour le second problème :
  - en distinguant la formulation des propriétés vraies mais non probantes (« 25 n'est pas la somme de trois nombres qui se suivent parce que 25 est impair »), de l'emploi de propriétés qui permettent de prouver une proposition,
  - en utilisant des contre-exemples ;
- la mise en évidence de connaissances pour le troisième problème (les nombres qui sont la somme de trois nombres qui se suivent sont des multiples de 3).

Pour un même contexte, nous pouvons déjà constater que, malgré la présence explicite ou implicite de la notion de méthode (« Comment faire ? », « Comment être sûr ? »…), les trois validations diffèrent aussi par les critères de jugement mis en œuvre ; ceux-ci sont relatifs à des techniques pour la première (économie du nombre d'essais, fiabilité des calculs…), à la rationalité mathématique pour la seconde, et pour la troisième au recours à des propriétés reconnues. La dévolution de la validation aux élèves suppose que ceux-ci comprennent ces différentes finalités. Nous analyserons dans le chapitre 6 comment se pose la question des interventions du maître et plus largement de la gestion des interactions orales dans le cadre de mises en commun.

3.3 Somme et différence

Rappel du problème et présentation de l'expérimentation

Dans ce problème, les élèves ont à chercher deux nombres entiers connaissant leur somme et leur différence. Dans une première séance, ils cherchent pour des valeurs pour lesquelles il y a une solution.

Dans le problème suivant, analysé ici, les élèves ont à prouver l'impossibilité de trouver une solution entière avec la somme *S* et la différence *D* de parités différentes.

Après un rapide échange permettant aux élèves d'exprimer qu'ils ne peuvent produire une solution satisfaisant les deux contraintes, le maître leur propose de justifier cette impossibilité.

Cette situation a été expérimentée dans 5 classes de CM2 (classes n° 3 et n° 4 en octobre 1995, n° 7 et n°8 en octobre 1996 à Gennevilliers et la classe n° 6 à Nanterre en novembre 1996). Mais nous nous intéresserons plus particulièrement aux preuves produites dans deux classes (n°6 et n°7), la première car les élèves ont été pour la plupart suivis sur deux années, la seconde à cause de questions qui ont surgi lors de la mise en commun. Nous analysons en premier les résultats obtenus dans la classe n°7 où l'expérimentation a eu lieu un mois et demi avant celle de la classe n°6.

3.3.1 Analyse des productions et des propositions dans un CM2 (classe n° 7)

a) Preuve de l'impossibilité

Dans cette classe, cette deuxième séance a comporté : une recherche individuelle pour les nombres 32 pour la somme et 7 pour la différence, suivie d'une mise en commun, d'une relance de la recherche pour 65 et 4.

Extrait d'une mise en commun sur l'impossibilité : Recherche pour 32 et 7 :

Ce travail est précédé d'un rappel de ce qui avait été cherché dans la séance antérieure permettant de revenir sur les contraintes du problème (certains élèves produisant la somme et la différence en utilisant plus de deux nombres), ainsi que sur la nécessité d'être précis dans les explicitations et sur l'intérêt de faire plusieurs essais.

Une mise en commun confronte les productions obtenues pour 32 et 7 : la plupart des élèves pensent qu'il n'y a pas de solution, d'autres font encore des calculs.

Extrait du corpus de la mise en commun sur l'impossibilité :

M.	… Alors Sanna qu'en penses-tu ?
Saana	c'est pas possible parce que j'ai fait 19 moins 12 et j'ai trouvé 7
	…
Saana	et après j'ai trouvé 19 + 12 et j'ai trouvé 31 et j'ai fait plusieurs solutions après j'ai pas trouvé
	…
M.	Qu'est-ce que tu as fait comme autre solution ?
Saana	j'ai fait 20-12 j'ai trouvé 8 …;
	et par contre 20 +12 = 32 ça marche ça fait bien 32
Saana	Alors Après je me suis dit que ce n'est pas possible parce que normalement ça doit être 7 et ça faisait 8

M.	Alors recommence Saana parce que là
Saana	C'est pas possible parce que pour 8 on arrive à aller jusqu'à 32 et pour 7 on n'y arrive pas, et nous on cherche 7
	Alors je sais pourquoi maîtresse je sais pourquoi
…	C'est un piège
M.	C'est pas un piège, c'est un problème qui apparemment n'a pas de solution, Julie
Julie	Moi J'ai fait une opération j'ai trouvé 8, et j'ai fait une autre opération j'ai fait moins 1 et j'ai trouvé 6. Ca veut dire que c'est impossible
	Moi aussi
M.	A chaque fois que tu trouves le bon nombre par exemple dans 32 tu trouves 8 ou 6…
M.	Pas de panique. Tesnim
Tesnim	6, 6 ou 8 c'est des nombres pairs et 7 c'est un nombre impair
M.	Bon alors on verra. J'en donne un autre 65 et 4 …

La proposition de Tesnim rencontre un écho favorable : plusieurs élèves reformulent le constat sur la parité. Immédiatement une demande de formulation est faite par l'enseignante :

> M. Vous vous taisez deux minutes pour que ceux qui sont encore en train de chercher puissent aller au bout de leur recherche… et vous pendant ce temps là vous écrivez vraiment une phrase que tout le monde puisse comprendre, qui donne votre explication pour qu'on puisse comprendre pourquoi ce n'est pas possible.

Remarques sur ces échanges

Les principales propositions émises lors de cet échange sont :

- impossibilité sans réelle justification «c'est un piège » ;
- impossibilité par encadrement :
    - avec un encadrement implicite : « moi j'ai fait une opération j'ai trouvé 8, et j'ai fait une autre opération, j'ai fait moins 1 et j'ai trouvé 6. Ca veut dire que c'est impossible » (Julie) ;
    - avec un encadrement explicite de la différence (cf. les explications de Saana);
- formulation d'une proposition sur la parité (Tesnim).

Nouvelle recherche pour 65 et 4 avec l'écriture d'une justification :

Immédiatement après sa dernière intervention, l'enseignante enchaîne :

> M. Bien alors,vous avez donc cherché pour la somme égale 65 et la différence égale 4 et vous avez tous constaté que ce n'est pas possible … on vous a donc demandé d'expliquer pourquoi ce n'était pas possible plusieurs ont trouvé des explications, Sylvain peux-tu aller expliquer au tableau pourquoi… ce que tu as fait pour pouvoir arriver à dire que cela est impossible

Les réponses produites sont :

- impossible sans justification ou avec une justification redondante : 3 élèves (Sylvain, Jessica, Alexandre)

- impossibilité : par production de tous les cas : « C'est impossible parce que je suis passé à côté de la solution » (Aïcha qui justifie en fait pour 32 et 7 et non pour 65 et 4 comme cela est demandé après avoir produit : 16+16 = 32, 16-16 = 0 ; 18+14 = 32, 18-14 = 4 ; 19+13= 32, 19-13 = 6 ; 20+12 = 32, 20-12 = 8 ; 21+11 = 32, 21-11 = 10 ; elle indique par une flèche sur sa feuille ou se trouverait une différence de 7).

- impossibilité parce que un des nombres est pair et l'autre nombre est impair :
  - sans autre justification : 20 élèves ;
  - avec des justifications complémentaires (« 65 et 4 on tombera dans le panneau par exemple on tombera sur 5 au lieu de 4 » Saana) ;
  - avec une formulation plus personnelle (Salim).

b) Quelques remarques sur l'ensemble de cette séquence :

1- les propositions formulées par Saana s'accompagnent d'arguments justifiant l'impossibilité à partir des calculs qui encadrent les valeurs cherchées.

2- La remarque de Tesnim, qui s'articule avec les propos précédents, porte sur la comparaison des différences obtenues par les calculs explicités par Julie.

3- Malgré la décision de l'enseignante de ne pas donner suite à cette remarque et de relancer les élèves sur une nouvelle recherche, le constat exprimé par Tesnim est repris oralement tout de suite par plusieurs élèves et figure par écrit dans les productions de 22 élèves, sans être accompagné d'une justification.

Evolution des preuves

Dans l'élaboration du travail de preuve, les évolutions portant sur :

- la reconnaissance de l'impossibilité (évolution des justifications apportées du simple constat au recours à des arguments mathématiques) ;
- la justification de cette impossibilité à partir d'essais non organisés ;
- la justification de l'impossibilité à partir d'essais systématiques.

Cette situation a permis aussi de repérer des preuves d'empirisme naïf :

Hassen	J'ai pris des exemples que l'on avait fait la dernière fois par exemple 43 et 17 c'est des nombres impairs
M.	D'accord
Hassen	et 38 et 16 c'est tous les deux des nombres pairs
M	et alors qu'est-ce que tu en as déduit…
Hassen	c'est pareil, à chaque fois c'est pareil donc c'est bon

Et surtout, comme nous l'avons vu, la difficulté à produire des preuves quand une proposition est reconnue comme évidente par l'ensemble de la classe et donc à dépasser la simple affirmation de sa vérité.

Aussi, dans les versions ultérieures de cette situation, la mise en commun suivant la première recherche pour des valeurs impossibles se limite au constat que personne ne trouve de solution (sauf en ne respectant pas les contraintes). Les élèves ont ensuite à écrire individuellement pourquoi il n'y a pas de solution. Ce sont ces propositions qui sont étudiées ensuite.

c) Recherche des conditions d'existence des solutions :

Comme nous l'avons vu dans l'étude de la preuve de l'impossibilité (en particulier dans l'analyse de la mise en commun dans la classe n° 7), la formulation par un élève du critère de parité acquiert le statut d'évidence pour les élèves. Aussi la recherche ultérieure des conditions d'existence d'une solution (« chercher les couples - somme et différence - pour lesquels il y a une solution », ou « comment choisir la somme et la différence pour qu'il y ait une solution…), ne présente plus d'enjeu de preuve suffisant. Cet obstacle - l'absence d'enjeu réel - s'est rencontré dans plusieurs classes où cette situation a été expérimentée.

3.3.2 Déroulement de la situation dans un autre CM2

Cette situation a été proposée en CM2 dans la classe n°6 (novembre 96).

La première séance (18/11/96) concernant le premier problème a été suivie d'autres recherches (les 19 et 25/11) pour des couples *S* et *D* admettant aussi une solution. Le problème de preuve de l'impossibilité a été aussi proposé avec les valeurs (32,7) et (65,4). Pour ce deuxième problème (impossibilité) le 26/11 les élèves devaient écrire pourquoi il n'y a avait pas de solution, une fois qu'ils le pensaient.

a) Analyse de la résolution de problèmes individuels (32,7) et (65,4)

Principales procédures:

Ce sont :
- la production d'un seul calcul,
- les essais de couples vérifiant *S* ou *D*.

Les procédures par essais conservent en général plutôt la somme *S* (l'élève calcule la différence de deux nombres dont la somme est *S*, puis recommence, si nécessaire, avec deux autres nombres dont la somme est *S*…). Les procédures privilégiant *D* constant ne sont produites que par un seul élève). L'autre valeur, en général la différence, est quelquefois calculée mentalement car *D* est petit :

La preuve de l'impossibilité s'effectuant par l'encadrement de *D* (en général) ou *S* (pour un élève donc) :

- essais encadrant entre deux valeurs *D* ou *S*,
- essais se rapprochant soit par valeurs supérieures soit par valeurs inférieures de *D* (début encadrement) ;

- la production d'une solution avec des décimaux.

Les principales difficultés sont liées à l'absence d'essai, à des erreurs de calcul, à l'absence d'un encadrement au voisinage de la solution.

b) Analyse des preuves formulées

Nous nous intéressons aux justifications produites pour répondre à la dernière question (« Pourquoi c'est impossible quand on a *S* impaire et *D* paire ? »). La première question appelant simplement un contre exemple, les deux questions suivantes pouvant être traitées par une liste de nombres.

Certains élèves ont seulement répondu à la dernière question (manque de temps, réponse déjà produite pour une question précédente). Les formulations complètes sont présentées à la suite du tableau 3.3 dans lequel elles sont indiquées par un numéro. Elle peuvent être classées en :

- Justifications non valides :
  - problème inachevé : 3 élèves (Jenny, Sofian, Sarah),
  - absence de justification : 1 élève (Hichem),
  - simple formulation de l'impossibilité : 2 élèves (Sabrina, Linda),
  - affirmation : 65 est un nombre impair et 4 un nombre pair :
    - « parce que 65 est un nombre impair et 4 un nombre pair » (Angélique, Betty Laetitia (8)) ;
    - parce que 4 est pair et 5 impair (Julien (3)).

- Appel à l'expérience : auparavant… *S* et *D* étaient paires (ou impaires) toutes les deux :
  - « on ne peut pas trouver parce que la somme est un nombre impair et la différence est un nombre pair. Au début avec 49 et 3 les deux c'est des nombres pairs » (Ahmed (2)) ;
  - « il n'y a pas de solution parce que le premier nombre est impair et le deuxième est pair dans tout ce que l'on a fait le nombre des unités pour le premier est pair et le chiffre des unités pour la différence est pair ou le chiffre des unités est impair les unités de la différence est impair » (Bruno (6)) ;
  - appui sur quelques valeurs : « On ne peut pas parce que 65 est impair et 4 est pair. J'ai trouvé 6 et 8 alors y avait pas d'autre solutions alors je me suis dit que 65 est un nombre impair et 4 un nombre pair. » (Brahim : (9)).

- Justification valide (ou début de justification) :
  - production d'une solution avec des décimaux On peut mais avec des nombres décimaux (30,5+34,5 = 65 et 34,5-30,5 = 4) ce n'est pas possible. (Carole (7)). Une élève (Jennifer) utilisant aussi cette procédure ne fait pas de bilan ;
  - encadrement de S ou de *D* :
    - « On ne peut pas arriver à 4 parce que j'ai fait 30-35 = 5 et 31-34 = 3 et parce que 31 après 30 » (Aurélie (1)),
    - « On ne peut pas trouver une solution parce que j'ai fait des opérations et je suis toujours tombé autour de 4, exemple 5, 3, 1. Entre 35 et 34 il y a 1 de différence j'ai fait 35+30 = 65. 35-30 = 5 et 34+31 = 65. 34-31 = 3 je n'ai pas trouvé de solution. On ne peut pas parce que 65 est un nombre impair » (Jonathan (10) ;
    - « On peut pas parce que j'ai fait 30+35 = 65, 30-35 = 5 et là il y a un point de plus et après j'ai fait 31+34 = 65, 31-34 = 3 et là il y a un point de moins. » (Kader (11)) :
    - On ne peut pas trouver *S* = 65, *D* = 4, parce que j'ai fait 31+35 = 66, 30+34 = 64, 29+33 = 6» (Nicolas (13)) ;
  - début d'encadrement :
    - « On ne peut pas tomber sur 4 parce que quand je fais 34-31 je tombe sur 3 et il y a un nombre pair avec un nombre impair » (Mélanie (12)) ;
    - « Il n'y a pas de solution parce que soit on tombe sur 5 ou 3 et c'est des nombres pairs ou impairs » (Khady (4)) ;

- « Je pense que ce n'est pas possible parce que 35+30 = 65 et 35-30 s= 5 ; 36+29 = 65 ; 34+11 = 65 , 34-11 = 23 et 36-29 = 7 et le nombre à trouver c'est 4 » (Mehdi (5)).

Une élève (Malika) produit un encadrement pour (32,7) sans formuler de conclusion, mais ses calculs ne font qu'approcher ensuite (65,4) car elle est repartie d'une des valeurs essayées pour le problème précédent (12+53, puis 14+51…).

c) Conditions d'existence de solutions

Le troisième problème (« Comment choisir la somme et la différence pour qu'il y ait une solution ?»), portant sur les conditions d'existence d'une solution, a été proposé avec des modifications prenant en compte l'expérimentation de la situation le mois précédent dans la classe n°7.

Cette phase a été suivie le même jour d'une demande de justification, produite par binôme, portant successivement sur quatre questions :

1- est-ce qu'il y a toujours une solution ?
2- comment choisir *S* et *D* pour qu'il y ait une solution ?
3- comment choisir *S* et *D* pour qu'il n'y ait pas de solution ?
4- pourquoi c'est impossible quand on a *S* impair et *D* pair ?

Pour tous les binômes, les productions donnent des justifications redondantes (voir annexe n° 2). Certains élèves répondent globalement aux questions. Comme cela était déjà remarqué dans la classe n°7, il n'y a plus réellement d'enjeu de preuve pour les élèves. Nous reviendrons au paragraphe 3.3.3 sur les limites de ces choix.

d) Récapitulatif des résultats

Tableau 3.3 ***Somme et différence*** **(novembre 1996, Nanterre)**

	32,7	F	65,4	J
AHMED	3 essais *S* constante		7 essais- *S* ou *D* Pas d'encadrement	(2)
ANGELIQUE	3 essais		0 calcul	(8)
AURELIE	6 calculs		*S* constant-	(1)
BETTY	Encadrement		Début d'encadrement	(8)
BRAHIM	Erreur de calcul 19-13 = 7		1 essai - erreurs de calcul	(9)
BRUNO	Erreur de calcul 19-13 = 7		2 essais *S* constante *D* = 1 et 3	(6)
CAROLE		imp	30,5 et 34,5	(7)
HICHEM	*5 essais sans conclusion*		*5 essais S ou D non systématiques*	
JENNIFER	8 essais jusqu'à 19,5+12,5		6 essais jusqu'à 33,5+28,5	(14)
JENNY	2 essais Encadrement		Non traité	
JONATHAN	5 essais organisés, *S* fixé		3 essais Encadrement	(10)
JULIEN	1 calcul		0 calcul	(3)
KADER	1 essai (19 et 13)		Encadrement	(11)
KEVIN	1 essai (20 et 12)		1 essai (36 et 29)	rien
KHADY	*4 essais S constant sans encadrement*		*4 essais sans encadrement*	*(4)*
LAETITIA	5 essais Encadrement		4 essais Encadrement	(8)
LINDA	1 essai (21+11)	imp.	Pas de calcul	imp
MALIKA	5 essais S fixe, Encadrement		5 essais	rien
MEHDI	7 essais ; (20,5+20,5)		4 essais (*S* fixe) Encadrement	(5)
MELANIE	5 essais sans encadrement		5 essais sans encadrement	(12)
NICOLAS	3 essais non probants *D* fixe	imp	3 essais *D* fixe	(13)
SABRINA	1 calcul	imp	0 calcul	imp
SARAH	rien	rien	rien	rien
SOFIAN	Inachevé		inachevé	rien

Les noms en italique sont ceux des élèves qui n'étaient pas dans la classe n°5 en CM1.

Dans ce tableau figurent :
- dans la seconde et la quatrième colonne, les procédures et éventuellement le nombre d'essais pour les problème (32,7) et (65,4) ;
- dans la troisième colonne (F) la formulation éventuelle de l'impossibilité pour le couple (32,7) ;
- dans la dernière colonne (J) un numéro renvoyant à la justification apportée ; « imp » signifie impossible sans autre justification. L'ensemble des justifications est présenté après le tableau.

Liste des justifications produites par les élèves :

(1) On ne peut pas arriver à 4 parce que j'ai fait 30-35 = 5 et 31-34 = 3 et parce que 31 après 30

(2) On ne peut pas trouver parce que la somme est un nombre impair et la différence est un nombre pair. Au début avec 49 et 3 les deux c'est des nombres impairs.

(3) Parce que 4 est pair et 5 impair.

(4) Il n'y a pas de solution parce que soit on tombe sur 5 ou 3 et c'est des nombres pairs ou impairs.

(5) Je pense que ce n'est pas possible parce que 35+30 = 65 et 35-30 = 5 ; 36+29 = 65 ; 34+11 = 65 , 34-11 = 23 et 36-29 = 7 et le nombre à trouver c'est 4.

(6) Il n'y a pas de solution parce que le premier nombre est impair et le deuxième est pair. Dans tout ce que l'on a fait le nombre des unités pour le premier est pair et le chiffre des unités pour la différence est pair ou le chiffre des unités est impair les unités de la différence est impair.

(7) On peut mais avec des nombres décimaux (30,5+34,5 = 65 et 34,5-30,5 = 4) ce n'est pas possible.

(8) Parce que 65 est un nombre impair et 4 un nombre pair.

(9) On ne peut pas parce que 65 est impair et 4 est pair. J'ai trouvé (,6 et 8 alors y avait pas d'autre solutions alors je me suis dit que 65 est un nombre impair et 4 un nombre pair.

(10) On ne peut pas trouver une solution parce que j'ai fait des opérations et je suis toujours tombé autour de 4. exemple 5, 3, 1. entre 35 et 34 il y a 1 de différence j'ai fait 35+30 = 65. 35-30 = 5 et 34+31 = 65. 34-31 = 3 je n'ai pas trouvé de solution.. On ne peut pas parce que 65 est un nombre impair.

(11) On peut pas parce que j'ai fait 30+35 = 65, 30-35 = 5 et là il y a un point de plus et après j'ai fait 31+34 = 65 ,31-34 = 3 et là il y a un point de moins.

(12) On ne peut pas tomber sur 4 parce que quand je fais 34-31 je tombe sur 3 et il y a un nombre pair avec un nombre impair

(13) On ne peut pas trouver S = 65, *D* = 4, parce que j'ai fait 31+35 = 66, 30+34 = 64, 29+33 = 6. *[6 écrit au lieu de 62]*

(14) Parce que ce nombre est ~~pair impair~~ [rayé par l'élève elle-même].

3.3.3 Bilan général sur cette situation

Les expérimentations menées dans plusieurs classes, permettent de dégager un double constat. Les questions de preuve de l'impossibilité ne peuvent être l'objet de débats, que si des formulations, ici sur la parité, n'emportent pas immédiatement la conviction.

Naturellement la recherche des conditions d'existence d'une solution ne peut pas être proposée avant celle de l'impossibilité ; sinon ce dernier problème aurait déjà reçu une réponse dans la résolution du précédent.

La synthèse sur les conditions d'existence

La preuve des conditions d'existence suppose une étude de tous les cas possibles : soit les deux nombres sont pairs, soit les deux sont impairs, soit l'un est pair et l'autre impair. Dans les deux premiers cas, la somme et la différence sont paires, dans le troisième, elles sont impaires. Nous avons constaté que ce raisonnement n'a pas été pas produit au niveau des CM concernés par cette expérimentation.

Cette synthèse portant sur tous les cas possibles n'a jamais été ni proposée, ni conduite par les élèves. Elle suppose en effet un décentrage sur x et y par rapport au problème portant sur la somme et la différence. Lorsque cette synthèse a été conduite par le maître, les élèves ont montré un intérêt limité ; pour eux ils étaient déjà convaincus du résultat.

Dans la version de la situation rédigée pour les maîtres (ERMEL 1999 a, édition 2005 p 69), compte tenu notamment de cette expérimentation, nous n'avons gardé, de l'ensemble des quatre questions, de fait redondantes, que: « Pourquoi ce n'est pas possible pour S impaire et D paire », question à laquelle les élèves ont à répondre individuellement par écrit.

3.4 Le plus grand produit

Présentation de la situation

Dans cette situation, les élèves ont à chercher parmi les décompositions additives d'un nombre donné celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.

Dans un premier problème (appelé phase 1), ils ont à résoudre pour trois valeurs numériques successives (10 puis 14 voire 16). La vérification des calculs est effectuée, mais la validation se limite au constat qu'aucune solution meilleure n'a été trouvée. Puis dans un second problème (phase 2), les élèves élaborent des propositions permettant de trouver le plus grand produit quel que soit le nombre choisi.

Ces propositions, produites individuellement, sont soumises à la critique lors d'une mise en commun, mais le cas échéant, selon les dispositifs expérimentés, certaines propositions font l'objet d'un travail par groupes. Il y a donc un passage explicite d'une recherche pour des valeurs particulières à une solution générale.

Les preuves et arguments analysés dans cette étude ont été produits dans ces échanges soit lors de la critique collective des propositions en groupe classe, soit lors des débats sur certaines d'entre elles, menés en petits groupes, soit encore lors des phases de synthèse ou des relances de la recherche sur certaines questions.

Cette situation a été expérimentée, sous des versions successives, dans plusieurs classes (classes n° 1 et 2 au premier trimestre 1994, n°3 en novembre 1995, n°5 en mai 1996, n° 7 en février 97 et n°8 en avril 97).

Dans ce chapitre, nous analyserons les preuves produites dans la classe n° 5 à Nanterre et dans la classe n° 7 à Gennevilliers. Une étude comparée des effets des choix didactiques sur cette production de preuves, produites lors de deux expérimentations conduites en octobre 1994 (classe n°1) et en avril 1997 (classe n°7) avec la même enseignante est développée dans le chapitre suivant.

3.4.1 Analyse des résultats produits dans un CM1 (classe n°5)

Dans cette situation, les productions sont constituées par des procédures et des propositions.

a) Présentation des procédures de résolution pour des valeurs particulières

Des procédures de résolution peuvent être produites à plusieurs moments dans cette situation, soit lors de la recherche pour un nombre donné dans la première phase, ou lors de l'évaluation finale, soit pour élaborer ou mettre à l'épreuve une proposition dans la deuxième phase.

Dans le chapitre 3 nous avions présenté les différents lemmes intervenant dans la résolution de ce problème dans le cas général.

Lors de la première phase de la situation, la validation se limite d'une part à la vérification que les solutions produites respectent bien les contraintes de l'énoncé, en particulier que la somme des termes pris en compte par l'élève ne dépasse pas le nombre initialement donné et, d'autre part, au constat qu'aucun élève n'a pu obtenir un produit plus grand. Les procédures ne sont pas critiquées et l'enseignant ne porte pas de jugement sur elles : l'explicitation des méthodes et leur critique constituant le problème de preuve qui est ensuite proposé.

Les principales procédures observées dans la résolution de ce premier problème pour le calcul sur des valeurs numériques particulières sont :

- procédure p1: Décomposition optimum : saturation avec des 3, puis recours éventuel à un ou deux 2 (par exemple pour 14 : 3 x 3 x 3 x 3 x 2) ;
- procédure p1- : Saturation avec des 3, mais la décomposition comporte un 1 (lorsque le nombre est congru à 1 modulo 3, comme par exemple 19) ;
- procédure p2 : Décompositions utilisant uniquement des 2, des 4 et des 3 sans saturation avec les 3 (dans la décomposition figurent plus de deux "2") ;
- procédure p3 : Décompositions s'appuyant principalement sur un produit de 2, ou des puissances de 2 (présence d'un seul 3 "terminal" dans le cas d'un nombre impair) ;
- procédure p4 : Décompositions utilisant des 2, des 3, des 4 et des 5 ;
- procédure p5 : Décompositions s'appuyant sur 5 (décomposition de 10 en 5+5, de 14 en 5+5+4…) ;
- procédure p6 : Utilisation d'autres nombres que 2, 3, 4, 5.

Nous proposons de comparer les procédures produites dans la classe n°5 :

- lors de la résolution du problème,
- et dans une évaluation proposée après la deuxième phase.

b) Etude des procédures produites lors de la phase 1

A la fin de la phase 1, les élèves de cette classe ont produit (pour 14) :

- procédure p1 : 4 élèves (Bruno, Brahim, Jonathan, Kader) ;
- procédure p2 : 2 élèves (Aurélie, Jennifer) ;
- procédure p3 : 7 élèves (Ahmed, Carole, Julien, Malika, Mehdi, Mélanie, Sabrina) ;
- procédure p4 : 1 élève (Sofian) ;
- procédure p5 : 6 élèves (Jenny, Karim, Laetitia, Linda, Nicolas, Sarah) ;
- procédure p6 : 1 élève (Angélique).

c) Propositions produites au début de la deuxième phase

Les propositions produites ici par binômes, l'enseignante pensant que cela constitue une aide indispensable pour qu'ils puissent les formuler, sont :

- proposition (nécessaire mais non suffisante) utilisant uniquement des 2, des 4 et des 3 sans précision du nombre de 2 (code B). « Utiliser des 3 » : Carole et Ahmed, Betty et Jonathan, ou « des 2 et des 3 » Bruno et Aurélie ;
- proposition « Pas de 1 » Laetitia et Karim (code B*) ;
- proposition (code C) « Prendre des 2 » ;

- proposition ambiguë ou imprécise : indiquant qu'il faut prendre des petits nombres (code D) Nicolas et Mélanie, Jennifer et Julien ;

- proposition erronée : (code E) « Décomposer en deux » Jenny et Kader, non respect des contraintes, Brahim et Malika

- indication de la tâche (code F) : « On multiplie » : Sarah et Mehdi, Angélique et Linda ;

Nous retrouvons ici les différents types de propositions attendues, déjà rencontrées précédemment :

- la proposition B* correspond au lemme 1, elle est vraie et peut s'établir rapidement,
- la proposition C et la proposition D ne sont pas précises,
- la proposition E est fausse
- la proposition F est redondante avec l'énoncé,

d) Procédures produites après la deuxième phase

Cette évaluation a été effectuée quelques jours après la deuxième phase, avec des valeurs différentes (17, 18 ou 19), selon les élèves, pour éviter une diffusion des résultats. Les résultats (486 pour 17, 729 pour 18, 972 pour 19) sont plus grands que lors de la première phase (162 pour 14), et les risques d'erreurs de calcul plus importants :

- procédure p1 : 9 élèves (Ahmed, Brahim, Bruno, Julien, Jonathan, Kader, Karim, Laetitia, Mélanie) ;
- procédure p1- : 2 élèves (Carole, Mehdi) ;
- procédure p2 : 1 élève (Malika) ;
- procédure p3 : 5 élèves (Aurélie, Jennifer, Jenny, Sabrina, Sarah);
- procédure p4 : 2 élèves (Linda) ;
- procédure p5 : 1 élève (Nicolas) ;
- procédure p6 : 2 élèves (Angélique, Sofian).

e) Récapitulatif des résultats : procédures et propositions

Ce premier tableau présente les procédures produites lors de la première phase, et lors d'une reprise du problème quelques jours plus tard.

Tableau 3.4 : Productions *Le plus grand produit* (mai 1996, Nanterre)

	1e séance		Reprise		
	calculs	procédure	Nombre	caalculs	procédure
AHMED	4*4*2*4	3	18	3*3*3*3*3*3	1
ANGELIQUE	4*8*2	6	19	2*2*2*2*2*9	6
AURELIE	4*3*4*3	2	19	2*2*2*4*4*3*2	3
BRAHIM	3*3*3*3*2	1	18	3*3*3*3*3*3	1
BRUNO	3*3*3*3*2	1	17	3*3*3*3*3*2	1
CAROLE H	2*2*2*2*2*2*2	3	19	3*3*3*3*3*3*1	1-
JENNIFER	3*4*3*2*2	2	17	4*4*4*2*3	3
JENNY	5*5*4	5	19	4*4*4*4*3	3
JULIEN	2*2*2*2*2*2*2	3	18	3*3*3*3*3*3	1
JONATHAN	3*3*3*3*2	1	18	3*3*3*3*3*3	1
KADER	3*3*3*3*2	1	18	3*3*3*3*3*3	1
KARIM	5*5*4	5	17	3*3*3*3*3*2	1
LAETITIA	5*5*4	5	19	3*3*3*3*3*4	1
LINDA	5*5*4	5	17	5*3*3*2*4	4
MALIKA	4*4*4*2	3	17	4*3*4*3*3	2
MEHDI	2*2*2*2*2*2*2	3	19	3*3*3*3*3*3*1	1-
MELANIE	2*2*2*2*2*2*2	3	17	3*3*3*3*3*2	1
NICOLAS	5*5*4	5	18	5*5*4*4	5
SABRINA	2*2*2*2*2*2*2	3	18	2*2*2*2*2*2*2*2*2	3
SARAH	5*5*4	5	17	2*2*2*2*3	3
SOFIAN	3*4*2*5	4	19	9*5*3*2	6

Les nombres proposés diffèrent pour éviter la diffusion de résultats lors de cette évaluation. Ils ne présentent pas tous les mêmes difficultés. On peut raisonnablement penser que 18 est le plus simple, et 19 le plus difficile à cause de la question du 1 terminal. Toutefois on constate qu'à part Carole et Mehdi qui ont gardé un 1 dans la décomposition de 19 et pour lesquels les résultats auraient pu être meilleurs avec 18, sans cette difficulté, les autres élèves ayant eu à chercher le plus grand produit pour 19 ont soit réussi (Laetitia), soit utilisé des nombres montrant qu'ils ne cherchaient pas à privilégier les 3. Par ailleurs Carole et Mehdi passent à une procédure privilégiant les 3.

Ce second tableau regroupe les procédures et les propositions

Tableau 3.5 Récapitulatif *Le plus grand produit* (mai 1996, Nanterre)

Nombre de solutions	Procédure	Proposition	Procédure reprise
BETTY		B	
JONATHAN	1	B	1
BRUNO	1	B	1
AURELIE	2	B	3
JENNIFER	2	D	3
JULIEN	3	D	1
JENNY	5	E	3
KADER	1	E	1
BRAHIM	1	E	1
MALIKA	3	E	2
SOFIAN	4		6
LINDA	5	F	4
ANGELIQUE	6	F	6
KARIM	5	B*	1
LAETITIA	5	B*	1
AHMED	3	B	1
CAROLE	3	B	1-
MEHDI	3	F	1-
SARAH	5	F	3
SABRINA	3		3
MELANIE	3	D	1
NICOLAS	5	D	5

e) Evolution des productions

La comparaison des procédures produites lors de la recherche pour 14, et de celles produites lors d'une évaluation se situant quelques temps après la critique des propositions est présentée dans le tableau ci-dessous où figurent pour chacune des procédures, le nombre d'élèves les ayant produites lors de la séance 1 (par ligne) et lors de l'évaluation (par colonne). Par exemple le nombre 3 situé sur la ligne p3 et dans la colonne p1 indique qu'il y a trois élèves ayant produit une procédure de type 3 à la première séance, qui ont produit une procédure de type 1 lors de l'évaluation.

Tableau 3.6 Comparaison des procédures *Le plus grand* produit (mai 1996, Nanterre)

		procédures produites lors de l'évaluation						
		p1	p1-	p2	p3	p4	p5	P6
Procédures	p1	4						
produites	p1*							
pour	p2				2			
16	p3	3	2	1	2	1		
	p4							1
	p5	2			1	1	1	
	P6							1

On peut constater :

- une augmentation des réussites (neuf élèves produisent la procédure optimum lors de l'évaluation), soit 36%,

- une évolution des procédures pour dix élèves (en dehors des quatre ayant réussi pour 14);

- par contre trois élèves n'ont pas progressé, et trois autres produisent des calculs où les 3 ne jouent pas un rôle essentiel.

Les procédures de type 6 sont liées à des élèves qui, pour 19, produisent une décomposition formée d'un 9 et de nombres compris entre 2 et 5.

3.4.2 Expérimentation menée en CM2

L'expérimentation conduite dans la classe n° 7 sera présentée au chapitre 4.

3.4.3 Bilan sur la situation

Relativement à ce problème plus difficile que les autres, des élèves sont capables de produire des éléments de preuve. Les résultats des post-tests dans cette classe, la participation des élèves au débat dans l'autre indiquent que cette recherche a mobilisé les élèves.

De plus, dans le domaine de la preuve, des propositions sont produites et critiquées. Comme nous l'avons annoncé, une étude de ces débats argumentatifs sera effectuée dans le chapitre suivant, ainsi que l'analyse des effets des organisations didactiques, qui ont varié entre les différentes expérimentations, sur la tâche réelle des élèves dans ce travail de preuve.

Toutefois nous voyons déjà que plusieurs éléments liés à la preuve sont appréhendés par les élèves dans cette situation : le rôle du contre exemple, celui de l'exemple, la nécessité de recourir à une propriété vraie pour en établir une autre et la formulation d'une proposition précise.

3.5 Cordes et somme des n premiers nombres

Ce problème de la somme des n premiers nombres a été expérimenté sous la forme décontextualisée (situation *Somme des n premiers nombres*) au CM2 et sous la forme contextualisée (situation *Cordes*) dans un CM1 et plusieurs CM2 (l'un en 1997 l'autre en 2004).

Dans le chapitre 5 nous présenterons les preuves élaborées par les élèves dans cette dernière classe.

3.5.1 La situation *Somme de n premiers nombres*

Cette situation a été expérimentée dans quelques classes, sous différentes organisations proposant de chercher la somme des nombres, d'abord pour une valeur réduite de n (en général n=10) puis pour des valeurs successives plus grandes.

Les procédures produites sont essentiellement

- des procédures additives ;
- des procédures visant à réduire les calculs additifs par :
  - regroupement des nombres deux à deux (1 et 25, 2 et 24…) :
    - avec effectuation de toutes les additions,
    - avec dénombrement des couples de nombres et calcul du produit (par exemple 12x25) en prenant en compte ou non le fait

que si le nombre de termes est impair il est nécessaire d'ajouter (ou de retrancher) le nombre du milieu, selon que le nombre de couples ait été compté par défaut ou par excès,

- regroupement des calculs par unités, dizaines ou par centaines (chercher la somme des nombres de 1 à 9 : 45, puis la multiplier pour avoir la somme des unités des nombres de 1 à 99 = 450, chercher la somme des nombres de dizaines entières des nombres de 10 à 99= 100+200…).

En l'absence de contexte, au niveau du primaire, la modélisation multiplicative n'a pas été atteinte que par des hypothèses sur les écritures additives.

En effet, dans les classes dans lesquelles cette situation, décontextualisée, a été observée, les productions étaient d'abord des procédures de type additifs. On ne peut exclure la permanence de calculs aditifs et la production de procédures « techniques » de réduction des additions. Le paradoxe étant que pour rendre nécessaire l'abandon de l'addition, il faut rendre celle-ci trop coûteuse, ce qui incite les élèves à développer des techniques pour économiser les calculs additifs en les regroupant…

Il y a un risque d'absence de formulation de conjecture dans l'amélioration - erronée ou non- du calcul additif.

3.5.2 La situation Cordes

L'analyse de cette expérimentation est développée dans le chapitre 6 dans le cadre d'une étude de la gestion de mises en commun.

4. ELABORATION D'UNE TYPOLOGIE DES PREUVES

A l'origine de cette étude nous souhaitions, d'une part, mieux connaître les potentialités des élèves dans l'élaboration de preuves en mathématique et, d'autre part, expliciter des conditions sur les situations didactiques qui favorisent la développement de ce travail de preuve. Au cours de l'analyse préalable des preuves au chapitre 3 et de celle des preuves produites effectuée dans ce chapitre, nous avons élaboré et utilisé des typologies de preuves qui se situaient au plus près de chacun des problèmes de preuve proposés et qui, pour certaines, étaient directement issues de l'analyse des procédures de recherche développées lors de la résolution des problèmes qui précédent les problèmes de preuve. Ces analyses mettent en évidence les proximités pouvant exister entre certaines procédures arithmétiques et aussi entre certaines justifications.

Pour pouvoir réellement comparer les preuves élaborées, déterminer si les problèmes auxquelles elles répondent constituent un champ de problèmes dont les relations ne se réduisent pas à celle éventuelle de leur structure arithmétique, il paraît nécessaire de se doter d'outils de classification qui soient communs à l'ensemble de ces problèmes. Dans ce but nous allons présenter une typologie des preuves, puis tenter de la valider en regardant si les différentes catégories de preuve, parfois décrites dans des formes spécifiques à chacun des problèmes étudiés précédemment peuvent être formulées dans cette nouvelle classification.

4.1 Proposition d'une classification

Dans certains problèmes, il n'est pas nécessaire de formuler une proposition, l'explicitation de l'organisation des solutions garantit la preuve de leur exhaustivité ou celle de la croissance ou décroissance systématique des essais garantit la preuve. Dans d'autres problèmes, la preuve suppose la production d'une proposition et la justification de sa validité par un raisonnement s'appuyant sur des propriétés. Nous distinguons trois composantes produites dans la résolution de ces problèmes de preuve :

- des propositions,
- des procédures arithmétiques,
- des justifications fondées sur des arguments, valides ou non.

a) Les procédures de preuve

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, dans ce type de problème, les procédures visées n'étaient pas des procédures expertes. Les procédures communes aux problèmes de recherche de tous les possibles dans un ensemble fini de solutions et aux problèmes de preuve de l'impossibilité ou de l'unicité s'appuient sur la production organisée d'essais de calculs selon des critères plus ou moins explicites. Les différents niveaux dans ce domaine pourraient être :

- **procédures permettant la résolution du problème de preuve** :
  - par l'encadrement ou l'exhaustivité ou des essais optimisés (code **a**). Cette catégorie regroupe notamment :
    - les procédures TE de *Trois nombres qui se suivent ;*
    - les procédures ayant permis d'établir l'exhaustivité ;
  - ne faisant pas appel à des essais successifs, (codées **a'**) :
    - le recours aux décimaux pour *Somme et différence*,
    - le recours à la division pour *Trois nombres qui se suivent ;*

- **procédure adéquate mais partiellement aboutie** : production d'essais avec réalisation partielle de l'encadrement, contrôle non mené à terme de l'évolution des essais (codées **b**); par exemple pour prouver que 25 est la somme des trois nombres qui se suivent seules les valeurs inférieures ont été produites de façon systématique. Pour les problèmes d'exhaustivité, le nombre de résultats produits a aussi de l'importance, la procédure seule ne peut entrer en compte et ce nombre est un élément d'analyse de la preuve.

- **procédure adéquate** mais sans organisation globale (codées **c**). La production d'essais mais sans prise en compte de l'écart au but (un couple de nombre dans *Somme et Différence* ou *Golf*, un triplet de nombres dans *Trois nombres qui se suivent*, une décomposition de nombres dans *Le plus grand produit*) ;

- **procédure cohérente** avec le problème, mais ne permettant pas de produire la solution (codées **d**) (exemple : pas d'essais successifs de plusieurs couples ou de triplets ou décomposition comme dans le cas précédent) ;

- calculs ne respectant pas les contraintes du problème (code **e**).

Nous voyons que ce qui différencie les trois premières catégories « **a** », « **b** », « **c** », porte sur la qualité du bilan effectué entre les essais. L'efficacité de la gestion des procédures par essais, qui comme nous l'avons vu, dépend à la fois de l'écart entre le premier essai et le but à atteindre et de l'interprétation de cet écart pour l'évolution des essais suivants : modifications des valeurs choisies allant dans le « bon sens », existence d'une « prise de risque entre deux essais », par exemple changement de dizaine pour la valeur d'une des variables ou au contraire production lente de toutes les valeurs intermédiaires) ; l'existence d'erreurs de calculs est aussi une information utile.

Pour certaines productions les catégories suivantes, sont nécessaires

- **0** : absence de résultat (sans calcul apparent permettant de l'interpréter),
- **1** : un seul essai (sans calcul apparent permettant de l'interpréter).

b) Lorsque les formulations concernent des propositions visant un degré de généralité et non des procédures produites pour des valeurs particulières, nous proposons le codage suivant :

- proposition vraie : formulation complète de la solution (proposition nécessaire et suffisante) (codée **A**) ;
- proposition nécessaire mais non suffisante constituant une étape importante de la solution (codée **B**)
- proposition vraie mais ne conduisant seule à la solution (codée **C**) ;
- proposition ambiguë ou imprécise (codée **D**) ;
- proposition erronée (codée **E**) ;
- proposition décrivant simplement la tâche (codée **F**).

Nous sommes conduits à privilégier deux critères : la vérité de la proposition et sa fonction dans l'établissement de la solution (complète, importante, secondaire). Enoncer que le 1 ne sert pas dans la décomposition du plus grand produit est une proposition vraie, mais qui seule ne constitue qu'un élément secondaire dans l'établissement de la solution.

c) les preuves relatives à la valeur de vérité d'une proposition

Les énoncés formulés par les élèves pour justifier une proposition peuvent être classés en plusieurs catégories suivant des critères évoqués au chapitre 1 :

- leur statut (valeur de vérité) : les justifications valides (suffisantes ou non), les justifications dont la valeur de vérité n'est pas encore déterminée, les justifications non valides.
- parmi les justifications non valides, nous retrouvons comme nous l'avons annoncé au chapitre 1:
  - celles qui sont redondantes, n'apportant pas d'information nouvelle,
  - celles dont le lien avec la proposition :
    - ne relève pas d'un fondement, pour reprendre Toulmin, compatible avec les mathématiques (rappel des habitudes scolaires W),
    - dont la garantie ne respecte pas les règles de preuves acceptées en mathématiques : énoncé d'une propriété vraie mais non probante , recours à des exemples…

1) Les preuves valides :

- justification (nécessaires et suffisantes) par appel à une propriété ou un raisonnement valide (code **J**), et en particulier seront distingués :
  - le contre-exemple (code **K**),
  - une liste exhaustive de solutions (code **L**) ;
- justification nécessaire mais non suffisante (code **I**) : ce sont des propositions mathématiques vraies mais qui, à elles seules, ne prouvent pas la proposition visée.

2) Les justifications dont le statut n'est pas encore déterminé :

- justification s'appuyant sur une propriété vraie et probante, mais ni reconnue par la classe, ni prouvée par l'élève (code **Q**),
- exemple générique qui, même si il est valide, nécessite d'être explicité (code **S**),
- formulation imprécise ou ambiguë (code **U**).

3) Les justifications non valides :

- justification s'appuyant sur une propriété erronée (code **N**),
- justification s'appuyant sur une propriété vraie mais non probante (code **P**),
- absence de justification (code **O**),
- formulation redondante (code **R**),
- description de la tâche (code **T**) ,
- justification basée sur l'expérience scolaire (code **W**),
- expérience cruciale (code **X**), pris dans sa signification définie par Balacheff et différente du contre-exemple,
- justification basée sur des exemples, relevant de l'empirisme naïf (code **Z**).

4. 2 Intégration dans cette classification des preuves propres à chaque problème

L'établissement d'une classification commune aux différents problèmes de preuve nécessite dans un deuxième temps de s'assurer que les types de processus de preuve produits dans les analyses précédentes puissent être effectivement regroupés, sans lacune, ambiguïté, ni contradiction dans cette nouvelle classification.

Nous allons étudier comment les procédures, propositions ou preuves utilisées pour l'analyse des différents problèmes expérimentés peuvent être intégrées dans cette nouvelle classification commune.

Certaines mises en correspondance sont relativement simples, d'autres plus complexes. Nous étudierons, au fur et à mesure, pour chaque situation les éléments nouveaux qui lui sont spécifiques ; en effet certains codages communs utilisés précédemment comme RS (Résultat seul), ou AN (recours à d'autres nombres qui indique le non respect des contraintes de l'énoncé dans la production de solutions (deux nombres qui se suivent au lieu de trois…) se recodent sans difficulté par 0 pour le premier et **e** pour le second, mais pour d'autres cela demande un peu plus de discussion.

a) Problème Golf

Si certains codages initiaux de procédures permettent en général une classification sans ambiguïté, par exemple un codage **a** pour ME (essais de multiples avec des échanges 5x3 et 3x5), ou Codage **d** pour CA (cumul additif), d'autres demandent de prendre en compte aussi le nombre de solutions effectivement produites pour catégoriser les procédures en **a**, **b** ou **c**. C'est le cas notamment pour CO (Cumul additif organisé), AM (addition à partir d'un multiple), M essai de multiples voire M5 (essai de multiples de 5). Rappelons que c'est l'organisation des essais successifs, en partie indépendante de la procédure de calcul qui spécifie l'appartenance à une nouvelle catégorie. La simple production de deux couples de multiples, sans relation entre les deux essais représente un niveau de contrôle moins efficace qu'un cumul organisé de 3 et de 8 à partir d'un multiple d'un des nombres permettant de produire plusieurs solutions. Dans certains cas il est nécessaire de repartir des productions pour établir le codage.

b) Les trois nombres qui se suivent

Dans cette situation, les procédures et les justifications sont recodables assez facilement.

1) Procédures de résolution du problème de preuve d'impossibilité

AN	autres sommes que des triplets	Code **e**
RS	résultat seul	Code 0
TE	essais de triplets comprenant 7,8,9 et 8,9,10	Code **a**
TSE	essais de triplets avec soit 7,8,9, soit 8,9,10	Code **b**
TR	autres essais de triplets	Code **c**

2) Justifications de l'impossibilité

1 : encadrement 7+8+9 trop petit , 8+9+10 trop grand	Code **J**
1- : encadrement formulé moins précisément	Code **I**
2 : solution 1 incomplète 7+8+9 ou 8+9+10	Code **I**
3 : recours à des exemples	Code **Z**
4 i : impossible car impair	Code **P**
4p : impossible car 25 est trop petit	Code **N**
4 : impossible mais autre justification erronée	Code **N**
5 : impossible car on ne peut pas ou formulation de l'impossibilité sans justification précisée.	Code **R**

3) Propositions produites

Ces propositions, produites en réponse à la question quels sont les nombres qui sont la somme de trois nombres qui se suivent.

1 : « ça va, on fait, de 3 en 3 »	Code **L**
4 : « on compte, on calcule… »	Code **F**
5 : « on choisit 3 nombres qui se suivent »	Code **F**
6 : explications confuses: « on compte les unités … »	Code **D**

c) Somme et différence

Dans cette situation, des procédures de preuve et des justifications relatives à l'impossibilité sont produites.

1) Les procédures de résolution sont recodables sans ambiguïté,

2) Les justifications.

Reprenons uniquement les justifications nouvelles par rapport aux problèmes étudiés préalablement :

- affirmation seule que ce n'est pas possible parce que : « 65 est un nombre impair et 4 un nombre pair » : Codage **Q**

- Appel à l'expérience : « auparavant [quand il y avait une solution]… la somme et la différence étaient paires (ou impaires) toutes les deux » : Codage **W**. Cet appel à l'expérience se distingue du choix d'un exemple : la conviction est fondée sur l'observation des cas antérieurs.

- Justification valide :
  - production d'une solution avec des décimaux :
    - comme procédure — Code **a'**
    - comme justification — Code **J**
  - encadrement de *S* ou de *D*
    - comme procédure — Code **a**
    - comme justification — Code **J**

- Justification valide mais partielle : début d'encadrement :
    - comme procédure — Code **b**
    - comme justification — Codage **I**

  exemple : « Je pense que ce n'est pas possible parce que 35+30 = 65 et 35-30= 5 ; 36+29 = 65 ; 34+11 = 65 , 34 -11 = 23 et 36-29 = 7 et le nombre à trouver c'est 4 » (Mehdi) : toutes les valeurs citées se trouvent au-dessus de 4 .

d) Le plus grand produit

Pour cette situation, les procédures peuvent être regroupées dans la nouvelle typologie proposée, ainsi que les propositions formulées par les élèves qui constituent, à cette étape, des formulations de méthode étendant à d'autres nombres ce qui a été calculé.

Le code des propositions dans *Le plus grand produit* prenait en compte ces catégories :

Code **A** : utiliser des 2 et des 3 avec le minimum de 2

Les propositions imprécises (« Petits nombres » : ou « Prendre assez de nombres ») sont codées **D.**

La proposition « Utiliser des 3 » peut être classée dans la catégorie **B**.

La proposition « Pas de 1 » énoncée seule peut être classée dans la catégorie **C**.

Les propositions « On multiplie » sont recodées **F.**

Les propositions « Décomposer en deux » code **E.**

5. ELÉMENTS DE SYNTHÈSE SUR LES PREUVES PRODUITES PAR DES ÉLÈVES SUR DEUX ANNÉES SUCCESSIVES

5.1 Objet et méthodologie de l'analyse

Le but de ces éléments de synthèse des résultats produits par les mêmes élèves sur une période plus longue qu'une simple séquence est de mettre en relation les procédures, propositions et justifications produites, et les caractéristiques des situations didactiques telles qu'elles ont été expérimentées dans ces classes.

Nous avons privilégié deux classes, un CM1 et un CM2, constitués en grande partie par les mêmes élèves ; ces deux classes sont celles de Dominique Lhotellier de l'école des Provinces Françaises à Nanterre ; ce sont les classe n°5 en CM1 en 95/96 et classe n° 6 en CM2 en 96/97.

L'intérêt du choix de ces deux classes réside aussi dans la diversité des problèmes qui ont pu être proposés sur ces deux années : les données comparées ici portent donc sur quatre situations expérimentées dans ces classes, soit dans l'ordre : *Les trois nombres qui se suivent* (novembre 1995), *Le plus grand produit* (mai 1996), *Golf* (octobre 1996) et *Somme et différence* (novembre 1996) et concernent les 21 élèves présents à la fois au CM1 et au CM2.

La comparaison porte sur plusieurs objets : les procédures permettant de prouver les solutions pour les différentes valeurs numériques (*Les trois nombres qui se suivent, Le plus grand produit, Golf, Somme et différence)*, les propositions visant à une généralisation éventuelle (*Les trois nombres qui se suivent, Le plus grand produit, Somme et différence*), les justifications formulées en réponse à des problèmes de preuve (*Les trois nombres qui se suivent, Somme et différence).*

Les secondes questions concernent la comparaison des résultats individuels et collectifs sur cet ensemble de situations pour voir si des évolutions éventuelles à plus long terme sont perceptibles.

Méthodologie

Si les données recueillies ont été présentées au paragraphe 2 de ce chapitre, leur analyse présentée dans ce chapitre pour répondre aux questions précédentes prend appui sur la typologie de procédures, de propositions et de justifications explicitée au paragraphe 4.1.

Ce sont donc ces différentes catégories de procédures, de propositions, de justifications qui seront comparées.

L'ensemble des données prises en compte pour cette analyse est présenté dans l'ordre chronologique :

- Pour la situation *Les trois nombres qui se suivent* :
  - les procédures visant à déterminer que 25 n'est pas la somme de trois nombres qui se suivent (colonne 1 de la première partie du tableau 3.7) ;
  - les justifications produites en réponse à la question « Pourquoi il n'y a pas de solution pour 25 ? » (colonne 2 du même tableau) ;
  - les propositions formulées en réponse à la question « Comment savoir si un nombre est la somme de trois nombres qui se suivent ? » (colonne 3).

- Pour la situation *Le plus grand produit* :
  - les propositions formulées (colonne 5),
  - les procédures utilisées dans l'évaluation pour des valeurs données (colonne 6).

- Pour la situation *Golf,* les procédures dont le codage intègre aussi le nombre de solutions produites, comme nous l'avons vu pour ce problème de recherche de toutes les possibilités (colonne 7).

- Pour la situation *Somme et différence* :
  - les procédures produites pour prouver que le couple (65, 4) n'admet pas de solution (colonne 9).

- les justifications apportées à la question portant sur l'impossibilité (colonne 10).

Pour effectuer une comparaison sur les procédures, nous n'avons pas conservé, pour *Le plus grand produit* et pour *Golf*, les résultats obtenus aux premières recherches qui permettent l'appropriation du problème. Ces premiers résultats ont, par ailleurs, déjà été analysés précédemment pour expliciter les améliorations ou les difficultés éventuelles dans la résolution de chacun de ces problèmes. Nous avons privilégié les productions spécifiques aux questions de preuve, qu'elles soient explicites ou implicites. Pour les deux situations, *Somme et différence* et *Les trois nombres qui se suivent*, les premières procédures de résolution sont déjà élaborées dans la première phase de chacune d'entre elles.

Cette synthèse concerne donc les 21 élèves qui étaient présents les deux années. Certaines productions étant effectuées par binôme, le n° de celui-ci est indiqué dans une colonne voisine de celle de la production, même dans le cas où l'autre élève du binôme n'a pas suivi les deux années.

Tableau 3.7.1

	CM1			1995/6			CM2 1996/7			
	3NB	3NB	3NB	Plgp	Plgp	Plgp	Golf	*Golf*	S&D	S&D
	impossibilité"25"	impossibilité"25"	3e problème		proposition	evaluation	92,3,5		65,4	Prop.I
	procédure	justification	proposition	binôme	proposition	procédure	procédure	binôme	procédure	justification
	07-nov	07-nov	23-nov		07-mai		07-nov		26-nov	26--nov
AHMED	c	R	B	*9*	B	a	c	*5*	b	Q
ANGELIQUE	d	I	0	*7*	F	d	d	*12*	c	Q
AURELIE	c	J	B	*2*	B	c	b	*6*	a+	J
BETTY	a	I	B	*1*	B		a	*1*	c	Q
BRAHIM	b-	J	B	*5*	D	a	c	*10*	d-	Q
BRUNO	a	J	B	*2*	B	a	a	*2*	a+	W
CAROLE	a	Q	B	*9*	B	b	c	*10*	a	J
JENNIFER	a	J	F	*3*	D	c	a	*2*	a+	O
JENNY	c	J	F	*4*	D	c	b	*4*	c	O
JONATHAN	a	J	B	*1*	B	a	d	*8*	a+	J
JULIEN	d	J	B	*3*	D	a	b	*3*	0	Q
KADER	c	I	D	*4*	D	a	a	*1*	a+	J
LAETITIA	c	J	F	*8*	C	a	d	*9*	a+	Q
LINDA	e-	J	D	*7*	F	c	c	*7*	0	R
MALIKA	c	S	F	*5*	D	b	c	*5*	c-	O
MEHDI	a	J	F	*10*	F	b	b	*4*	c-	I
MELANIE	c-		D	*12*	D	a	d	*13*	c+	I
NICOLAS	a	J	0	*12*	D	d	b	*3*	a+	J
SABRINA	c	J	D	*11*		c	c	*7*	d	Q
SARAH	a	J	D	*10*	F	c	c	*11*	0	O
SOFIAN	c	R	F	*6*		d	c	*6*	d	Q

Tableau 3.7. 2 : procédures et propositions

											Procédures		Propositions	
a/A	9					8	4		8		29	35,37%	0	
b/B	1		8		6	3	5		1		10	12,20%	14	35,00%
c/C	8				1	6	8		6		28	34,15%	1	2,50%
d/D	2		5		8	3	3		3		11	13,41%	13	32,50%
e/E	1										1	1,22%	0	
f/F			6		4						0		10	25,00%
1											0		0	
0			2						3		3	3,66%	2	5,00%
	21		21		19	20	20		21		82	100,00%	40	100,00%

Tableau 3.7.3 : justifications

													Justifications
juste	**J**		13								5	18	43,90%
incomplet	**I**		3								2	5	12,20%
contre-exemple	**K**											0	
liste exhaustive	**L**											0	
exemple générique	**S**		1									1	2,44%
justification ambiguë	**U**											0	
probante mais non prouvée	**Q**		1								8	9	21,95%
absence de justification	**O**										4	4	9,76%
decription de la tâche	**T**											0	
redondante	**R**		2								1	3	7,32%
référence au travail	**W**										1	1	2,44%
expérience cruciale	**X**											0	
constats empririque	**Z**											0	
justification fausse	**N**											0	
vraie mais non probante	**P**											0	
			20								21	41	100,00%

5.2 Résultats

Des réserves méthodologiques s'imposent sur les causes des évolutions, d'autres facteurs pouvant intervenir ayant leur origine notamment dans les autres activités mathématiques tant en termes de connaissances (procédures multiplicatives, résultats mémorisés, relations arithmétiques entre les nombres…) que dans l'assurance ou les compétences développées lors de la résolution d'autres problèmes que les situations abordées dans cette étude, voire même que dans les améliorations des possibilités de critique ou de débat accrues qui sont aussi la conséquence des autres mises en commun.

Dans la partie haute du tableau, les productions des élèves sont présentées selon les critères explicités ci-dessus. La partie basse regroupe des éléments quantitatifs en fonction des différentes catégories précédemment déterminées.

a) Les justifications

Ces justifications concernent deux problèmes où il s'agit de prouver une impossibilité l'un posé au début de CM1 (*Les trois nombres qui se suivent*) et l'autre au début de CM2 (*Somme et différence).*

Dans les justifications produites individuellement, nous pouvons constater :

- qu'il n'y a pas de justification erronée,
- que les justifications redondantes sont rares (7,32%) et que l'ensemble des justifications redondantes ou faisant appel d'une façon générale aux essais antérieures (code **W**) constituent moins de 10% des réponses,
- que, si les justifications probantes sont plus nombreuses dans le premier problème, dans le second beaucoup d'élèves répondent à la question à partir d'une propriété vraie dont les élèves sont persuadés, et qu'il ne leur apparaît pas nécessaire de prouver (ce que nous avions constaté de façon accrue dans la classe n°7). S'il y a 46% de justifications probantes (codes **J** et **S**), il y a aussi plus du tiers des justifications (codes **I** et **Q**) qui sont partielles ou dont la preuve nécessite d'être elle-même établie.

b) les procédures

Les procédures concernent chacun des problèmes ; les principaux constats :

- les procédures ne prenant pas en compte les données du problème (code **e**) sont elles aussi exceptionnelles (1,2%), et en y ajoutant les non réponses (3,7%) elles représentent moins de 5%, ce qui s'explique par le fait que les contraintes du problème ont été appréhendées par certains élèves dans les phases de recherche précédant les problèmes de preuve.
- les procédures permettant d'établir la solution (code **a** 35,4%) ou de l'approcher (code **b** 12,2%) sont aussi fréquentes (39/82 soit 47,6%) que celles ne présentant pas une stabilité ou une organisation suffisante pour y parvenir (codes **c** et **d**).

c) les propositions

Il est plus difficile de comparer des propositions, car aucune des formulations de proposition n'est complète, ni pour la formulation de la généralisation dans le problème des *Trois nombres qui se suivent* où plus du tiers des élèves avaient exprimé la solution sous forme de liste plus ou moins explicite, et où le nombre de formulations par appui sur une proposition qui n'est pas prouvée est lié à la question de l'évidence, ni pour la situation *Le plus grand produit* où le nombre de propositions ambiguës est plus important compte tenu de la place de cette formulation, avant que la question du nombre de 2 et de 3 ne soit abordée (les formulations précèdent la mise en commun).

6. BILAN SUR LES PRODUCTIONS ET LES SITUATIONS

L'étude précédente des productions avec les mêmes élèves durant deux années successives, ainsi que les autres résultats présentés dans ce chapitre, mettent en évidence les potentialités des élèves dans l'élaboration de processus de preuve, la diversité des preuves produites, et les conditions ou limites des situations. Nous reviendrons dans première partie de ce bilan sur les preuves produites par les élèves, puis dans une seconde partie sur les situations, tant du point de vue des problèmes que des organisations didactiques.

6.1. Examen des preuves produites

Nous avons pu analyser au long de l'étude de chacune des situations expérimentées les relations entre les résultats produits et les preuves attendues, celles-ci pouvant être différentes suivant les problèmes ; de plus la nature des preuves attendues était aussi fonction des connaissances des élèves, de leur possibilités de formulation pour les propositions et les justifications.

a) Deux types de processus de preuve

Comme nous l'avons déjà dit, il semble nécessaire de distinguer :

1) des preuves qui supposent une organisation raisonnée d'essais de calculs. Ces procédures basées sur l'explicitation d'une production organisée (variation monotone) de valeurs numériques et un contrôle explicite que toutes les valeurs que peut prendre une variable ont été produites. Cette organisation vise à assurer :

- la recherche de toutes les possibilités (*Golf*) ;
- un encadrement permettant d'établir une impossibilité :
  - *Les trois nombres qui se suivent* (2e problème : preuve de l'impossibilité pour 25),
  - *Somme et différence* (2^e^ problème : preuve de l'impossibilité pour une somme et une différence l'une paire et l'autre impaire) ;
- établissant une relation entre des nombres : *Les trois nombres qui se suivent* (3e problème : recherche de tous les nombres qui sont la somme de trois nombres qui se suivent entre 50 et 100) pouvant s'accompagner d'une formulation générale ;

2) des preuves nécessitant l'élaboration d'hypothèses de propositions puis leur critique par des raisonnements dans des problèmes :

- explicitant les conditions d'existence d'une solution (disjonction des cas) pour *Somme et différence ;*
- justifiant l'optimisation d'une solution pour *Le plus grand produit* ;

- visant à établir une procédure générale pour les problèmes de dénombrement.

b) Les procédures

Les procédures basées sur l'organisation d'essais de calcul se distinguent entre elles selon plusieurs critères :

- la nécessité d'une production de toutes les solutions (*Golf* ou *Trois nombres qui se suivent* pour le problème de recherche entre 50 et 100) ou la production suffisante des solutions encadrant un nombre (*Trois nombres qui se suivent* ou *Somme et différence* pour les problèmes d'impossibilité). Dans le premier cas c'est l'objet même du problème, dans le second c'est un outil pour résoudre un autre problème ;
- l'ensemble de solutions concernées. En effet, les justifications ne sont pas du même ordre dans les deux cas : dans le premier cas l'élève doit mettre en évidence soit une organisation des solutions selon une valeur croissante ou décroissante d'une des variables, soit formuler une règle d'échange permettant à partir d'une solution de produire les autres (par exemple échanger trois 5 contre cinq 3 dans la situation *Golf*), les deux méthodes pouvant être associées. Dans le second cas, il suffit d'expliciter pourquoi il ne peut y avoir de valeur intermédiaire, sans pour autant produire toutes les solutions.

Toutefois ces deux méthodes ont en commun la réorganisation des essais suivant des valeurs monotones (croissantes ou décroissantes) d'une des variables.

c) Les justifications produites

Un premier constat porte sur l'existence de procédures de preuve produites dans ces situations par des élèves de l'école primaire :

Existence de justifications non redondantes :

Certains élèves ne produisent pas de justification à l'appui de leurs propositions ; d'autres produisent des justifications qui ne s'appuient pas sur des arguments nouveaux :

- des justifications qui expriment un simple constat,
- des affirmations qui sont redondantes,
- des simples rappels de l'énoncé,
- des explicitations de méthodes, qui indiquent qu'il faut effectuer un calcul, reprenant ainsi parfois simplement la description technique de la consigne.

Mais nous avons vu que les justifications redondantes sont assez rares, que si ces affirmations ou les répétitions de la consigne sont produites par certains élèves leur présence peut être aussi liée à une absence d'enjeu suffisant pour la formulation d'une proposition générale ou à des difficultés dans le recours à un vocabulaire précis.

D'autres propositions ou justifications posent des questions sur :

Les propositions ou justifications qui développent des arguments nouveaux présentant des caractéristiques un peu différentes de celles attendues :

- il y a relativement peu de propositions vraies mais non probantes, ce recours pouvant relever plus d'un phénomène de contrat (affirmer ce que l'on connaît sur un objet mathématique).

- les propositions sont très fréquemment valides, en particulier la relation avec la proposition qu'il s'agit de prouver est cohérente ; mais les propositions produites constituent très souvent, lorsqu'elles sont valides des éléments de preuve nécessaires mais non suffisants.

d) Des difficultés

Si, comme nous l'avons vu, problème par problème, certaines des preuves produites par les élèves correspondent aux preuves attendues, les difficultés rencontrées dans leur élaboration peuvent avoir plusieurs causes :

- des difficultés liées à la mise en œuvre de procédures par des essais de couples de nombres : essai d'un seul couple, erreur de calcul, absence de bilan, interprétation erronée des calculs, changement de stratégie… Ces difficultés ne sont pas spécifiques aux problèmes de preuve et leur maîtrise constitue d'ailleurs un des objectifs de cette progression visant à développer en premier des stratégies de recherche chez les élèves du cycle 3, en particulier l'identification de ce qui varie dans les essais successifs.

- des difficultés plus spécifiques à la production de propositions ou de justifications :

  - liées à l'élaboration de preuves complètes, et non pas seulement de propositions nécessaires, que l'on retrouve dans plusieurs situations.

  - des difficultés langagières, probablement plus fréquentes dans les classes de ces expérimentations. Les propositions ou justifications ne sont pas toujours suffisamment explicites pour être comprises sans ambiguïté par d'autres élèves. Nous avons vu en particulier que dans la situation *Le plus grand produit,* les élèves formulent une proposition générale en utilisant souvent des termes imprécis.

Comme nous l'avons annoncé au début de ce chapitre, l'analyse des critiques formulées dans des échanges argumentatifs s'effectuera de façon plus approfondie dans le chapitre suivant à partir de l'analyse d'interactions dialoguées.

e) Conclusion

Ces situations visent une confrontation progressive des élèves dans des problématiques de preuve. Dans cette optique les évolutions observées montrent, comme nous l'avons vu dans l'analyse des résultats pour des élèves suivis sur deux années, une certaine diversité. Si de nombreux élèves réussissent à produire des preuves, notamment des justifications, qui sont tout à fait compatibles avec ce qui peut être attendu à ce niveau, compte tenu des limites langagières, d'autres n'ont pas progressé de la même manière. Mais leurs justifications extra-mathématiques ou simplement redondantes sont rares et l'intérêt de la confrontation de ces élèves à ces problèmes ne se mesure pas seulement en termes d'évolution des procédures de preuves produites.

Nous sommes ici, pour les processus de preuve, face à une question posée par l'enseignement des mathématiques : faut-il réserver les situations de preuve et plus généralement les situations de recherche qui en constituent la première phase, aux élèves qui sont capables de produire des procédures performantes ? La réponse apportée par ces expérimentations ne diffère pas de celle que notre équipe a choisie tout au long du primaire : à partir du moment où il y a une dévolution effective du problème, les élèves les plus faibles peuvent être confrontés à des situations de recherche, même si leurs procédures ne leur permettent pas de traiter seuls le problème de preuve.

Mais il ne faut pas oublier que, si notre étude permet de préciser les preuves produites, les situations expérimentées appartenaient à un ensemble de situations, plus vaste que celles analysées dans ce chapitre, qui avait comme principale fonction de développer des procédures de recherche, et non pas seulement des procédures de preuve ; les problèmes de preuves, excepté pour les situations *Le plus grand produit* et les situations de dénombrement, ne constituant qu'une recherche supplémentaire. De ce point de vue, les procédures de calcul, notamment la mise en œuvre et l'organisation d'essais se sont améliorées. Les problèmes de preuves visant une organisation raisonnée des calculs contribuent aussi à cette évolution.

6.2 Bilan sur le situations

Nous avons distingué des types de problèmes de preuves suivant que ceux-ci nécessitent la production de justifications basées principalement sur la production de valeurs différentes, qui ne poseraient pas d'autres difficultés que celles liées à l'organisation des procédures, ou sur l'élaboration et la critique de propositions. Mais chacune des situations expérimentées a mis en évidence une ou plusieurs interrogations sur des choix de mise en œuvre, et leurs effets. Certaines de ces questions concernent plusieurs situations : les obstacles dus à l'évidence pour *Les trois nombres qui se suivent* et *Somme et différence*, l'importance d'une formulation précise pour *Le plus grand produit*, les difficultés même de la généralisation pour *Golf* (la notion de méthode), l'importance des connaissances pour *Les trois nombres qui se suivent.*

a) La question de l'évidence

La prise en charge par les élèves du travail de preuve suppose l'existence d'un enjeu suffisant ; l'évidence peut y faire obstacle.

Nous avons vu dans la situation *Somme et différence* dans la classe n° 7 que la formulation par une élève qu'il n'y a pas de solution parce que l'un des nombres (la somme) est paire et l'autre (la différence) est impaire est une proposition qui est reprise par beaucoup d'élèves. Cette évidence prend appui sur les nombreux essais que les élèves ont produits sans pouvoir aboutir. Seuls quelques-uns maintiennent comme justification de l'impossibilité des raisonnements qu'ils avaient produits auparavant et qu'ils remettent un peu en forme. La remarque formulée par Tesnim comme interprétation d'un calcul prend la dimension d'une proposition générale. La preuve de cette proposition, présentée en termes généraux (« quels sont les nombres qui peuvent être choisis pour la somme et pour la différence ? »), ne présente plus un enjeu suffisant pour les élèves.

b) Le champ numérique

Une autre difficulté réside dans le maintien d'un intérêt centré sur la production de solutions particulières au détriment de formulations de solutions plus générales.

Nous avons vu que dans la plupart des situations il y avait une rupture organisée entre une première phase où les élèves produisaient des solutions particulières, dépourvues d'enjeu de preuve, et les phases de preuve. Cette rupture étant due à un changement soit dans le problème (passage de la production d'une solution à la production de toutes les solutions, ou à la résolution pour un cas impossible …) soit dans les valeurs des variables (passage à une valeur ou à un ensemble de valeurs interdisant les procédures antérieures).

Mais dans les problèmes visant la formulation d'une proposition générale, le problème est parfois posé en précisant un domaine numérique. Dans la situation *Le plus grand produit*, les limitations du champ à des nombres inférieurs à 20 ou à 30 ne constituent pas un obstacle à la formulation de propositions, alors que dans la situation *Les trois nombres qui se suivent* (troisième problème : recherche de toutes les solutions) la donnée d'un domaine numérique (entre 50 et 100) entraîne la production d'une liste exhaustive, à partir de laquelle les propriétés n'émergent pas toujours aisément. La différence tient aussi au fait que dans *Les trois nombres qui se suivent* le domaine proposé contient la liste des solutions.

Dans d'autres situations (*Le plus grand produit*), si le champ numérique est limité pour rester dans un domaine où les élèves peuvent effectivement calculer les produits, le nombre de solutions pour chacun de ces nombres rend impossible une stratégie qui consisterait à chercher tous les produits de façon exhaustive pour déterminer le meilleur pour des élèves du Cycle 3. La proposition d'un champ pour les valeurs des nombres n'est pas ici un obstacle.

c) Les exigences de précision

Une contrainte constante aux situations de preuve portant sur un problème général est la nécessité pour le maître de faire abandonner des formulations imprécises car les significations que leur accorde chaque élève peuvent être différentes. La résolution du même problème une année précédente (*Le plus grand produit* classe n°3) où les formulations des élèves étaient restées longtemps imprécises n'avait pu aboutir à la formulation de propositions contradictoires.

d) La nature de la proposition

Un autre obstacle a été rencontré pour la critique des propositions débattues.

Dans certains cas, la formulation de la proposition peut faire l'objet d'interprétations différentes. Elles posent la question du choix des propositions à débattre. Faut-il proposer des propositions complexes ou préférer des propositions plus simples ?

Nous avons vu aussi que dans certaines situations, la formulation de la demande en termes de « méthode » constitue une difficulté : les élèves ne comprennent pas toujours s'il s'agit de décrire l'enchaînement des calculs de façon plus générale, s'il faut s'interdire d'utiliser des nombres, s'il s'agit de préciser un comportement.

e) L'organisation du travail de preuve

Nous avons vu que plusieurs critères entrent en jeu pour distinguer l'organisation du travail de preuve :

- la preuve porte-t-elle sur des solutions numériques ou sur des propositions (générales ou particulières). Une relance de la recherche peut être nécessaire dans le premier cas, elle concerne en général la production de solutions nouvelles (exemples) ; mais dans le second elle vise la critique de propositions qui ne peuvent être débattues directement.

- la proposition peut-elle être débattue directement ou est-il nécessaire que le maître organise les étapes du débat ? Nous avons vu dans le cas des *Trois nombres qui se suivent* (phase 2 : preuve de l'impossibilité) qu'un aspect nouveau de cette phase de validation est la possibilité de distinguer dans les propositions formulées par les élèves celles qui peuvent faire l'objet d'un traitement collectif lors d'une première mise en commun et celles qui ne peuvent l'être sans prendre le risque que les débats ne concernent qu'une partie des élèves. Nous reviendrons sur cet aspect dans les chapitres suivants pour la comparaison des organisations relatives au *Plus grand produit.*

- la proposition est-elle simple ou suppose-t-elle un enchaînement de propositions. Celui-ci peut-il être produit ou retrouvé par les élèves ou non ? Dans la situation *Le plus grand produit*, la preuve de la proposition suppose non seulement ce tri mais aussi une organisation par le maître de l'ordre dans lequel les propositions peuvent être traitées tout en laissant aux élèves la charge de la preuve pour chacun des sous-problèmes abordés (la décomposition en plus de deux nombres, l'élimination du 1 des décompositions, le rejet des nombres supérieurs ou égaux à 5, la limitation du nombre de 2).

f) La question de la synthèse

Nous avons pu constater que, dans plusieurs situations, la question se posait de ce qui pouvait être prouvé par les élèves lors de la mise en commun et de ce qui relevait d'une synthèse conduite par le maître. En effet, dans certaines situations comme *Le plus grand produit* l'articulation des propositions prouvées dans les classes où ces expérimentations ont été conduites est trop complexe pour que les élèves puissent parvenir seuls à les restituer ; le maître restitue alors les étapes des recherches successives. Dans d'autres situations comme dans *Somme et différence* (3[e] problème relatif aux conditions d'existence de solutions), dans les classes de cette expérimentation, seul le maître peut organiser la preuve par l'étude de tous les cas possibles de l'impossibilité (prendre deux nombres pairs ou impairs, un nombre pair et un nombre impair).

7. CONCLUSIONS

Le premier résultat de ces analyses est que des problèmes de preuve peuvent être résolus par des élèves, même situés dans des milieux défavorisés.

Le second résultat est que des problèmes de recherche sont résolus avec une certaine efficacité .

Le troisième résultat est que si tous les élèves ne réussissent pas à résoudre des problèmes de preuve, il n'y a pas de justification ou de proposition qui se situeraient dans un champ extra- mathématique.

Si des problèmes de preuve peuvent être résolus par les élèves au Cours Moyen, avec des procédures dont l'analyse a été développée dans ce chapitre, nous avons aussi constaté que ces problèmes nécessitent, selon la nature des questions de preuves posées une organisation didactique dont les caractéristiques, en particulier dans la conduite des débats seront analysées dans les chapitres suivants.

Chapitre 4 :
MISE AU POINT D'UNE SITUATION DE VALIDATION
EFFET DE L'ORGANISATION DIDACTIQUE SUR LES PREUVES ELABOREES PAR LES ÉLÈVES.

1. OBJET ET METHODES

1.1 Les questions abordées

L'objet de ce chapitre est d'analyser les argumentations mathématiques produites par les élèves, lors de mises en commun, pour la justification ou la critique des preuves et d'identifier des conditions sur les situations qui conditionnent la critique collective des propositions.

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence la diversité des procédures de preuve, en distinguant notamment celles fondées sur l'organisation des résultats de calcul et celles fondées sur une justification de propositions. Nous avons aussi relevé, dans le développement de ces processus, plusieurs difficultés qui concernent soit les problèmes de preuve proposés soit la mise en œuvre des situations. Dans ce dernier cas, pour la plupart des situations analysées, la résolution du problèmes de preuve ne suppose pas d'établir la vérité de propositions intermédiaires nécessaires. Mais, lorsque la résolution du problème de preuve nécessite d'établir la vérité de propositions intermédiaires, comme dans la situation *Le plus grand produit*, la tâche de l'enseignant est plus complexe, car elle suppose non seulement la dévolution de la critique des productions aux élèves comme précédemment, mais aussi des choix portant sur l'articulation du traitement de ces propositions intermédiaires.

Dans ce chapitre nous cherchons donc à mettre en évidence l'effet des organisations didactiques sur l'activité mathématique réelle produite par les élèves dans le travail de preuve. Est-ce que les preuves élaborées par les élèves correspondent à celles attendues ? et si ce n'est pas le cas, pourquoi ? La comparaison de ces dispositifs porte sur la nature du travail de preuve qui est effectivement dévolu aux élèves lors des mises en commun.

1.2 Le contexte de l'étude

Comme pour d'autres situations, les expérimentations successives de la situation *Le plus grand produit,* conduites dans le cadre de la recherche « Apprentissages mathématiques et argumentation au cycle 3 » avaient pour fonctions d'une part de préciser le rôle de l'argumentation dans ces apprentissages, et, d'autre part, de mettre au point des scénarios qui puissent être utilisés par des maîtres de façon autonome, dans des conditions ordinaires ; c'est à dire de permettre à des enseignants, qui s'y intéresseraient, bien évidemment extérieurs à cette recherche, de s'approprier ces situations afin de pouvoir eux-mêmes les mettre en œuvre dans leur classe.

Or, l'élaboration de ces situations didactiques permettant la production de preuves, suppose de pouvoir prendre en compte les compétences des élèves, relatives à la preuve ou l'argumentation qui n'étaient pas autant explorées que pour d'autres niveaux que le primaire ou d'autres champs que celui des mathématiques, comme nous l'avons vu au chapitre 1. Les potentialités des élèves dans ce domaine étaient à préciser : leur repérage constituait un résultat visé dans les premières années de la recherche citée.

L'expérimentation des mêmes problèmes, plusieurs années de suite, avait notamment pour but de modifier l'organisation didactique en fonction de la connaissance accrue de ces compétences (implication des élèves dans les débats, capacité à formuler des arguments spécifiques aux mathématiques…). Ces expérimentations ont conduit à une structuration différente des séquences. L'objet de ce chapitre est aussi d'analyser les effets des modifications introduites.

1.3 Les données analysées

Nous avons choisi pour cette analyse la situation *Le plus grand produit*, car la résolution de ce problème nécessite le recours à des raisonnements dont la complexité suppose de clarifier ce qui peut être de la responsabilité des élèves et ce que le maître doit prendre en charge. Nous avons vu, en effet, dans l'analyse du problème au chapitre 2, que l'élaboration de la preuve suppose d'établir plusieurs propriétés. La résolution de ce problème nécessite donc des choix organisationnels donnant aux élèves un réel travail mathématique de preuve tout en assurant la validité des preuves.

Pour conduire cette étude nous analyserons les argumentations développées lors de la mise en œuvre de cette situation en 1996/1997 à Gennevilliers (classe n°7) ; nous appuierons cette analyse sur une comparaison avec une autre expérimentation de cette situation menée deux années auparavant (classe n°1). La première expérimentation s'est déroulée dans un CM1 en novembre, la seconde en CM2 à la fin février[13]. Dans ces phases expérimentales, les mises en commun concernant ce problème ont été conduites par la même équipe (enseignante, chercheur) ; les choix relatifs à l'organisation de la situation et des mises en commun, concernant les tâches qui incombent à l'élève ou celles qui sont prises en charge par le maître, avaient été, pour la plupart, décidés ensemble préalablement.

Les données enregistrées sont donc constituées par les débats durant les phases de mise en commun et aussi par quelques échanges dans des groupes pour la seconde expérimentation.

1.4 Méthode et outils d'analyse

Les cadres d'analyse relatifs aux situations didactiques, aux processus de preuve et à l'argumentation en mathématiques ayant été exposés dans le chapitre 2, ce paragraphe précise les outils d'analyse spécifiques aux débats développés notamment par la critique des propositions.

Les outils complémentaires présentés ci-après seront aussi utilisés pour l'analyse des interactions langagières dans le chapitre suivant qui est centré sur les questions posées par la gestion d'une situation dans des conditions « ordinaires ». Aussi nous préférons les présenter dans leur intégralité, bien que tous les éléments de chaque classification ne soient pas utilisés dans ce chapitre.

Comme nous l'avons précisé au début de ce chapitre le critère qui va permettre de comparer les effets des organisations didactiques est celui de l'activité

[13] Nous n'avons pas utilisé pour notre étude la situation expérimentée en 95/96 - l'année intermédiaire entre ces deux réalisations - car, les classes de CM2 de cette année-là comprenait des anciens élèves du CM1 qui avaient déjà travaillé sur cette situation en 94/95.

mathématique réelle des élèves dans ce travail de preuve et plus précisément ici la nature des propositions et des critiques qu'ils peuvent élaborer.

1.4.1 La structuration des échanges

Pour l'étude des processus d'élaboration des preuves et de leurs critiques lors des débats entre les élèves, la séquence pouvant être composée de plusieurs phases, dont celle constituée par exemple par la validation des propositions lors d'une mise en commun, dans les travaux de groupe ou lors de phases de mise en commun, il est utile de segmenter les corpus en unités du discours.

Nous distinguerons quatre unités concernant les échanges :

- les étapes de la séquence, par exemple l'étude d'une proposition d'un groupe ou celle de chacune des propriétés L1 à L4.
- les épisodes relatifs à un même thème au sein d'une de ces étapes, par exemple la formulation d'une critique ou d'une justification grâce à plusieurs intervention ;
- les tours de parole (intervention d'un individu) ;
- les énonciations (proposition, argument, question…) à l'intérieur de ce tour de parole.

1.4.2 Les interventions des élèves

Pour analyser les interventions des élèves nous avons distingué les aspects liés aux prises de parole, à leur enchaînement, plus largement à l'aspect dialogique des échanges d'une part, et le type d'énoncé mathématique formulé d'autre part.

a) Les aspects langagiers et relationnels

Ceux-ci portent non seulement sur la structure du débat mais aussi sur la répartition et la circulation de la parole, les implications personnelles dans les débats :

- l'articulation des prises de parole : empilement, discours parallèles, complémentarité… ;
- la prise en compte des propositions des autres : reformulations, interrogations, explications, justifications, critiques…
- la négociation : accord, opposition, concession, dissociation, tentative de conciliation…

b) Les énoncés mathématiques

Les énoncés mathématiques de l'élève peuvent être de différents ordres :

- des explications ou reformulations sans apport d'information nouvelle,
- des questions destinées à d'autres ou des demandes d'explication,
- des énoncés de propositions,
- des critiques, ou plus largement des formulations de jugements,
- des argumentations à l'appui d'une proposition.

L'argument étayant un énoncé (proposition, critique…), s'il existe, peut être de différents types : argument d'autorité, appel à l'expérience, constats, évidences partagées (lois générales, lieux communs…) recours à des connaissances privées ou partagées ou à des savoirs scolaires stabilisés, production de raisonnement.

Une classification des justifications mathématiques concernant les problèmes traités a été proposée dans le chapitre précédent (paragraphe 4.1).

1.4.3 Les interventions de l'enseignant lors de la mise en commun

Pour les analyser nous adaptons une classification produite dans le cadre de la recherche ADIREM/INRP citée dans l'introduction :

1) l'organisation du débat, les incitations et la régulation sociale du groupe : annonce ou rappel des règles régissant l'échange, relances portant sur l'attention, sollicitation de certains élèves qui ne se sont pas exprimés ;
2) les interventions relatives aux énoncés qui visent leur explicitation : demandes de reformulation, reformulation par le maître lui-même, recentrage sur une question qui est débattue, simple rappel du problème ;
3) les interventions techniques sans changement du thème débattu : corrections d'erreurs de calcul, demande de précisions ;
4) les reprises de conclusions partagées, les synthèses après accord ;
5) les réorientations du débat, l'introduction d'une thématique nouvelle ;
6) Les interventions mathématiques portant un jugement, rappelant un savoir non évoqué dans les échanges ou les productions.

Nous avons donc retranscrit les mises en commun dans ces deux réalisations en faisant apparaître, en commentaire, une qualification de l'intervention de l'élève ou de l'enseignant.

2- PRESENTATION DE LA STRUCTURE DES SEQUENCES

Les séquences se déroulant dans la même école à deux années d'écart ; elles sont conduites par la même enseignante.

Ainsi que nous l'avons rappelé précédemment les modifications apportées à la situation (problèmes posés, débats…) entre la première mise en commun (en novembre 1994) et la seconde (en avril 1997) ne sont pas simplement dues au bilan effectué après la première expérimentation, dans cette classe, d'autres expérimentations ayant été menées dans d'autres classes (notamment celles citées dans le chapitre précédent).

2.1 Rappel du problème

Le problème *Le plus grand produit* a été présenté au chapitre 2 (§ 2.3.2) et une partie des résultats au chapitre 3 (§ 3.4).

Les élèves ont à chercher, parmi les décompositions additives d'un nombre, celles dont le produit des termes est le plus grand (le nombre est d'abord donné puis quelconque).

La recherche est d'abord proposée pour des valeurs numériques particulières, dans le but de permettre l'appropriation du problème, puis dans une deuxième phase, pour n'importe quel nombre avec des modalités différentes suivant les deux expérimentations.

La solution de ce problème suppose - au niveau du primaire - d'établir la validité de plusieurs propositions (les différents lemmes exposés au chapitre 2). La mise en relation de ces lemmes, leur enchaînement, doit aussi être explicitée. La structuration des échanges en « étapes de la séquence » des deux mises en commun peut être étudiée en fonction de ces propriétés mathématiques dont l'établissement de la vérité est nécessaire à la preuve de la solution :

- L1 : ne pas conserver de 1 dans la décomposition ;
- L2 : ne pas limiter les décompositions à des sommes de deux termes (emploi de plus de deux nombres). Rappelons que cette proposition ne constitue pas un lemme nécessaire à la résolution, comme nous l'avons précisé au chapitre 2, mais que certains élèves ont besoin de se dégager de cette contrainte supplémentaire, non présente dans l'énoncé, qu'ils se donnent : pour eux, il suffirait de prendre une décomposition en deux nombres pour trouver le plus grand produit ;
- L3 : la décomposition donnant le plus grand produit ne comporte pas de nombre supérieur ou égal à 5 ;
- L4 : lorsque le nombre de 2 est égal ou supérieur à trois, on remplace trois 2 par deux 3.

Les propositions L1 et L2 peuvent être étudiées en commençant par l'une quelconque des deux ; aussi nous prendrons l'ordre dans lequel elles ont été abordées dans chacune de ces expérimentations (L2 puis L1). Ensuite nous aborderons les deux derniers lemmes (L3 puis L4).

Chacune de ces tâches, la preuve des lemmes et l'explicitation de leur enchaînement, peut être l'objet de choix de la part de l'enseignant concernant ce dont les élèves ont la responsabilité et ce que, lui, doit prendre en charge. Des questions, par exemple, se posent à lui :

- comment faire évoluer les remarques, constats, propositions des élèves vers le traitement de l'un de ces lemmes ?
- comment assurer leur traitement mathématique ?
- comment assurer l'enchaînement des propositions ?

2.2 Présentation des séances

Pour permettre l'analyse des caractéristiques des deux situations, nous présentons d'abord le déroulement des séances, avec les recherches successives proposées, les principaux résultats produits et les phases de mises en commun. Cette description se veut une aide à la compréhension de la chronologie des séances. Une analyse comparative de ces déroulements précédera l'étude des interactions langagières dans les phases de mise en commun.

Pour des raisons pratiques nous appellerons dans ce chapitre « première expérimentation » celle de novembre 1994 et « seconde expérimentation » celle de février- mars 1997.

Rappelons que l'analyse des preuves et des argumentations développées lors de la deuxième expérimentation s'appuie sur l'éclairage apporté par l'analyse de celles développées lors de la première ainsi que des réalisations intermédiaires.

2.2.1 Première expérimentation

Elle se déroule sur plusieurs séances à quelques jours d'intervalle en novembre 94. Dans chacune de ces séances seront identifiées des étapes au sein de la mise en commun :

a) Première séance :

Une première séance, assez brève, avait concerné la présentation du problème et la recherche pour 10.

b) Deuxième séance (lundi 14/11):

1) Rappel de la recherche menée à la séance précédente et recherche pour 14.

L'enseignante indique : « Vous n'allez peut-être pas être obligés de faire beaucoup d'essais. Il y a peut-être des essais que vous allez pouvoir éliminer » et précise que les élèves peuvent se servir de la calculette.

2) Une mise en commun sur les questions suivantes, qui constituent chacune une étape :

- Emploi de plus de deux nombres (durée : 5 minutes) ;
- Rôle du 1 (durée : 4 minutes) ;
- Amélioration des décompositions (durée : 11 minutes).

La mise en commun est introduite par : « On va voir comment [chacun] dans son travail a réfléchi… et on va voir aussi comment on peut améliorer son propre travail ».

c) Troisième séance

Cette séance (le jeudi 17/11) comporte :

1) Un rappel de la recherche précédente qui aboutit à la formulation de la proposition « 5 et moins de 5 » :

La maîtresse demande : « Qui peut dire ce qu'il faut faire pour trouver le plus grand produit… Comment on s'y prend… vous réfléchissez un petit peu pour faire une phrase bien précise, complète, que tout le monde puisse comprendre ».

Les principales propositions formulées oralement sont:

- « On a un nombre, par exemple le nombre 10… On le décompose… Ensuite on en refait un autre… On doit en obtenir un plus grand… » (Najat).
- « Deux nombres ça fait pas un grand nombre » (Latifa).
- « On utilise pas le chiffre 1 » (Nasradine).
- « Pour trouver le plus grand produit… moins de 5 » avec la précision « on utilise pas le 1 » reformulé par la maîtresse en « on fait soit 2, soit 3, soit 4. Est-ce que vous êtes d'accord avec ça ? … nombres plus petits que 5 et plus grand que 1 ». « On va essayer de vérifier si cette proposition est juste pour trouver le plus grand produit… Est-ce que c'est vrai ? »

2) Une relance de la recherche, après un bref échange sur les grands nombres. La consigne étant : « On va chercher le plus grand produit pour tous les nombres que je vous donne mais en même temps vous devez vérifier quoi? que c'est en utilisant… cette idée [plus petit que 5] que l'on va trouver le plus grand produit ». Des valeurs des nombres (13, 16, …) sont données aux différents binômes d'élèves.

3) Une mise en commun abordant :

- le rôle du 5 ;
- le nombre de 2 et de 3 dans la décomposition.

2.2.2 Seconde expérimentation

Cette expérimentation s'est déroulée le jeudi 27/2/97 pour la première séance et le lundi 3/3/97 pour la seconde séance :

a) Première séance : recherche pour des valeurs particulières

Dans cette phase de recherche pour des valeurs particulières (10 puis 14, puis 16), la validation des solutions a été limitée à l'énoncé des plus grands produits trouvés pour le nombre proposé.

L'objet de cette phase n'est pas d'engager un travail de preuve, mais d'assurer la compréhension du problème. Il ne s'agit pas de déterminer si les résultats calculés pour chacun de ces nombres sont les plus grands que l'on puisse obtenir, mais de constater que personne n'en a trouvé de meilleur et de vérifier que les contraintes du problème sont bien respectées, principalement que la somme des termes de la décomposition n'est pas supérieure au nombre donné.

A la fin de cette phase, des premiers constats ont été formulés par des élèves comme « utiliser les 1 ça ne sert à rien ».

Les résultats ci-dessous concernent les procédures ayant permis à chaque élève de produire le meilleur résultat pour la recherche pour 16 .

- Procédure 1 : 2 élèves (Patrick, Aïcha)
- Procédure 2 : 4 élèves (Allison, Jessica, Sanah, Tesnim)
- Procédure 3 : 4 élèves (Hassen, Karim A, Kheir, Mohammed)
- Procédure 4 : 5 élèves (Alexandre, Majidi, Salim, Violette, Sedat)
- Procédure 5 : 3 élèves (Asmaa, Jessy, Julie)
- Procédure 6 : 4 élèves (Karim B, Laila, Marc, Marli)

Ces procédures indiquent simplement quels sont les nombres qui ont été utilisés pour calculer le plus grand produit pour 16. Cela ne signifie pas que ces procédures sont stables depuis de nombreux essais. Pour certains élèves, des erreurs de calcul ont pu leur faire abandonner des procédures plus efficaces.

Nous pouvons remarquer qu'à l'issue de cette première séance seuls deux élèves ont réussi à atteindre par des calculs la solution, sans la prouver, bien entendu. De plus, l'utilisation optimale de 3 (3x3x3x3x2x2 = 324) s'est produite pour 16 seulement, après un calcul 4x4x3x3x2 = 288 et non pour 14, la valeur précédente.

b) Deuxième séance : résolution du problème général

Cette séance comprend plusieurs phases :

1) Formulation de propositions écrites par les élèves. La maîtresse leur indique : « Aujourd'hui, ce que l'on va faire, on va essayer de trouver une méthode pour trouver le plus grand produit pour n'importe quel nombre. Ce que je veux, pour le moment, c'est que chacun donne ses idées par écrit individuellement ».

Il n'y a pas de calcul pour de nouvelles valeurs numériques au début de cette séance, à la déception de beaucoup d'élèves qui préfèreraient chercher pour de nouvelles valeurs ainsi qu'ils l'avaient fait à la séance précédente.

Les propositions produites par les élèves peuvent être regroupées en plusieurs catégories. Les propositions transcrites sont présentées à l'annexe n° 3. Nous considérons ici les propositions isolées, si elles sont associées, l'ensemble de la proposition d'un élève ne se réduit pas, bien évidemment, à l'une d'entre elles :

1) celles qui n'apportent pas d'information nouvelle : « décomposer le nombre » (proposition de type F de la classification du chapitre 3);

2) celles qui sont erronées : « prendre la moitié, par exemple pour 10, 5+5 c'est la moitié, après on fait 5 x 5, ça nous donne le plus grand nombre, ici c'est 25 » (proposition de type E) ;

3) celles qui correspondent à des constats déjà formulés « ne pas mettre de 1 » (proposition de type B) ;

4) celles qui sont imprécises comme : « prendre des petits nombres » ou « avec des grands chiffres ça donne des petits chiffres, mais avec des petits chiffres ça nous donnera des grands nombres » (propositions D) ;

5) celles exprimant des conditions sur un champ numérique comme :

- « prendre des nombres de 2 à 4 » (Allison);
- « prendre des petits nombres sauf 1 et si j'utilise 2 ou 3 ça me donnera un grand nombre… mais il ne faut pas mettre au-dessus de 5» (Jessy);
- « prendre de 2 à 5 ou 6 » (Tesnim);
- prendre 3 ou 4 (« Il faut prendre des petits chiffres et ces chiffres sont 3 et 4 ») (Patrick).

2) Tri des propositions par le maître en deux catégories (celles qui peuvent être traitées immédiatement et celles qui feront l'objet d'une analyse par groupe). La première catégorie comprend les propositions des types deux à quatre, la première ne nécessitant pas un traitement collectif.

Lors de cette séance une première mise en commun porte donc sur l'analyse collective de certaines propositions :

- décomposition en deux nombres ;
- rôle du 1 ;
- propositions imprécises du type « il faut prendre des petits nombres ».

3) Relance de la recherche par groupes sur deux des quatre propositions qui n'avaient pas été traitées collectivement lors de la mise en commun précédente.

En effet, l'hypothèse que nous avions faite est que ces quatre propositions qui précisaient un champ numérique étaient trop complexes pour être traitées collectivement, alors que pour les autres, il nous paraissait possible, compte tenu des expérimentations menées antérieurement, d'effectuer leur traitement : la preuve de leur vérité pouvant être établie à partir de connaissances déjà partagées par l'ensemble de la classe (car stabilisées depuis longtemps), ou pour celles qui étaient fausses, des contre-exemples, dont la compréhension serait accessible à tous, pourraient être produits.

Par ailleurs, parmi certaines de ces quatre propositions, le champ numérique proposé est soit incomplet (« prendre des 3 ou 4 »), soit trop vaste (« il faut prendre de 2 à 5 ou 6 », « il faut prendre des petits nombres différents de 1 et inférieurs à 6 »). Il peut aussi être correct, mais la proposition étant nécessaire mais non suffisante : « il faut prendre des nombres de 2 à 4 » n'indique pas combien de 2, ou de 3, il faut choisir.

Enfin, pour que les groupes puissent débattre correctement de chacune des propositions, celles-ci ne peuvent être trop nombreuses. Le choix a été de soumettre à la critique des groupes deux propositions :

- la proposition n° 1: « Pour obtenir le plus grand produit, il faut prendre 3 ou 4 »; cette proposition est fausse, 2 devant être aussi utilisé ;
- la proposition n° 2 : « Pour obtenir le plus grand produit il faut prendre des nombres de 2 à 6 »; cette proposition n'est pas suffisante, 5 et 6 sont à décomposer.

4) Mise en commun des conclusions de chaque groupe sur ces deux propositions.

Cette mise en commun se conclut sur l'utilisation de 2, 3 ou 4 dans la décomposition.

5) Relance (l'après-midi du même jour) sur la question du nombre de 2 et de 3 :

- la mise en évidence de la question ;
- la recherche par binôme ;
- la mise en commun des résultats.

<u>2.3 Comparaison des deux déroulements</u>

Les éléments communs des deux situations, résident en premier, dans la succession de problèmes posés pour des valeurs numériques particulières lors d'une première séance, puis dans le traitement du problème général. Nous avions constaté, lors de premières pré-expérimentations, que, si la recherche sur des valeurs particulières conduit à chercher pour de nombreuses valeurs, les élèves arrivent à produire des solutions optimales pour ces valeurs, ou généralisent même en repérant que les types de solutions vont de 3 en 3 (cf au chapitre 2 § 2.3.2, sans recourir aux notations…), mais que le passage à la preuve de ces solutions ne présente plus d'enjeu pour eux. Par ailleurs, les deux déroulement sont structurés sur une organisation semblable du traitement des lemmes.

Les différences principales portent sur la structuration de la recherche pour le problème général :

- la formulation initiale de propositions dans la seconde expérimentation est individuelle et écrite alors que, pour la première expérimentation, celles-ci sont simplement exprimées oralement par des élèves au début de la séance ;
- dans la première expérimentation, l'enseignante propose des nombres dans le but que les élèves cherchent sur des mêmes valeurs et puissent comparer leurs résultats ;

- dans la seconde expérimentation, aucun nombre n'est proposé à ce niveau ; le traitement de certaines propositions, selon un tri préalable fait par la maîtresse, fait l'objet d'une relance de la recherche sur leur validité, par petits groupes, avant le traitement collectif de ces propositions.

Les étapes sont les mêmes, cependant comme nous l'avons évoqué, deux différences singularisent la seconde expérimentation par rapport à la première :

- les débats portent sur des propositions qui doivent pouvoir s'appliquer à tous les nombres, les élèves, lors de l'étude de ces propositions connaissent ce critère ;
- la critique de ces propositions « générales » est l'objet même du débat, alors que dans la première expérimentation les méthodes étaient éventuellement précisées au fur et à mesure de leur discussion.

En termes de théorie des situations, si des situations d'action existent dans chacune des expérimentations, l'existence de situations de formulation semble plus problématique pour la première séance. Existe-t-il des énoncés pouvant faire l'objet d'une situation de validation ? L'analyse des preuves et des échanges semble nécessaire pour répondre. Nous reviendrons sur ce point en fin de chapitre.

Dans l'analyse de ces deux situations, nous nous intéresserons aux effets des changements dans l'organisation sur les argumentations et preuves produites ; ces changements étant dus notamment, comme nous l'avons précisé, à la meilleure connaissance des compétences des élèves et à l'expérience acquise dans la conception et la conduite de ces situations de preuve par l'équipe (enseignant, chercheur).

3 ANALYSE DES PREUVES ELABOREES

L'analyse des argumentations développées par les élèves va s'appuyer sur la seconde expérimentation, dans laquelle celles-ci sont plus développées, mais en les mettant en relation avec ce qui a été produit lors de la première. Pour celle-ci, selon les questions abordées, des extraits du corpus seront analysés ou bien les échanges seront résumés. Cette comparaison contribue à l'explicitation des conditions didactiques qui permettent, au primaire, le développement des processus de preuve.

Les étapes sont les mêmes dans les deux cas. Elles concernent les questions suivantes :

- l'emploi de plus de deux nombres,
- le rôle du 1,
- la question de la précision,
- la réduction du champ numérique aux nombres 2, 3 et 4,
- le nombre de 2 et de 3 dans la décomposition.

3.1 Emploi de plus de deux nombres :

3.1.1 Première expérimentation

Présentation d'une solution : décomposition en deux termes

Déroulement	Actions de l'enseignante et des élèves [14]
M Avec la feuille de Mikaël : "Il a commencé par chercher 10+4 -> 10x4=40; ensuite il a continué 9+5-> 9x5 = 45; ensuite qu'est-ce qu'il a fait à votre avis 8+6-> 8x6 = 48 ;	*Formulation d'une méthode Sollicitation des élèves*
Saana Il veut essayer de faire comme la table de multiplication parce que	Explication basées sur les connaissances partagées
… comme avec les nombres qui se suivent 40, 45, 48 … de 3 en 3	Allusion au problème des trois nombres qui se suivent traité précédemment
M Non pas de 3 en 3 qu'est-ce qu'il a essayé de faire ici ?	*Rappel implicite du contrat adidactique : la réponse est dans l'activité mathématique actuelle*
Latifa Il a essayé de trouver toutes les décompositions possibles	Explication acceptable
M à Mikaël Qu'as tu fait ensuite… Est-ce que l'on peut en trouver d'autres ?	*sollicitation*
M … Un à la fois	
Mik je faisais déjà les multiplications… je commençais les additions	Explication par description de la tâche
M D'accord avec ces nombres-là tu n'as plus trouvé de multiplication	*Constat*
M Combien de nombres utilise à chaque fois Mikaël	*Introduction par la maîtresse d'une piste nouvelle*
… 4	
M 2 ou 4 ?	
… 2	
M Combien de nombres a utilisé Mikaël ?	*Reformulation de l'objet de recherche*
… Il a utilisé à chaque fois deux nombres	Conclusion

L'élève a cherché, dans un premier temps, les décompositions de 14 en deux termes qui lui permettraient d'obtenir le plus grand produit. L'allusion d'une autre élève (Saana) à la multiplication montre que cette procédure de recherche de tous les possibles avec deux nombres (reformulée par Latifa) peut être comprise comme une procédure identifiée.

Nous voyons que s'il y a des explications, il n'y a pas de justification produite.

Présentation des autres produits et généralisation

M Après qu'est-ce que tu as fait :	*Sollicitation*
Mik. 5+5+4…->100	
M Tu as essayé 5+5+4	*Reformulation*
… C'est quand même plus grand	
M Après qu'est-ce que tu as essayé encore ? tu en as essayé d'autres	*Sollicitation*
Mik. 5 fois 6	
… 11	
M non 5 fois 6	*Correction d'une erreur*
? 30	
M C'est le plus grand produit que tu as fait ?	*Sollicitation*
… 5x6x3= 90 …	

[14] Les commentaires en italique portent sur les interventions de l'enseignante.

… J'ai trouvé 96 6x4x4 = 96	
… Maîtresse, j'ai trouvé 144	

M On s'arrête là déjà	*Sollicitation d'une proposition plus générale et non sur une solution particulière*
M Quand on fait un calcul de produit avec deux nombres	
… Alors le produit, il est plus petit…	
M le produit est plus petit	
… Alors que si on décompose tous les nombres que l'on a au début, alors le nombre est un peu plus grand	Explication
M Est-ce que tout le monde est d'accord avec cela ?	
M Quand on fait une décomposition avec seulement deux nombres on n'obtient pas un produit très grand; quand on fait une décomposition avec trois nombres, on obtient déjà un produit plus grand. Est-ce que tout le monde a vu ça …	*Conclusion*

Cette dernière proposition signifie que pour les nombres proposés (10, 14, 16), il est possible de trouver un produit en décomposant en trois nombres qui soit plus grand qu'avec une décomposition en deux nombres.

Dans ces épisodes, l'élève apporte des explications aux questions de l'enseignante ; il n'y a pas de production d'argumentation, mais des réponses aux sollicitations centrant plus ou moins explicitement sur le nombre de termes de la décomposition, comme « alors le produit il est plus petit » ; ces propositions ne sont pas argumentées ; il s'agit de constats.

La centration sur le nombre de termes est de l'initiative de l'enseignant.

3.1.2 Seconde expérimentation

a) Les propositions produites

Les propositions produites par les élèves, donc au début de la deuxième séance (le lundi 3 mars) sont de différents types (cf Annexe n°4) :

- Seuls deux élèves ne formulent pas de réponse en terme de proposition pour trouver le plus grand produit : une non achevée (Mohamed), l'autre ne fait que décrire la consigne (Laïla).
- En ce qui concerne le rôle du 1 :
    - deux élèves expriment que l'on peut prendre des 1 dans la décomposition (Alexandre et Karim B.) ;
    - cinq élèves expriment qu'il ne faut pas prendre de 1, dont deux avec une justification par un exemple (Asma, Jessy, Sanah) et deux sans justification (Karim A. et Tesnim).

- En ce qui concerne le nombre de termes de la décomposition :
    - un élève (Kheir) exprime qu'il faut prendre la moitié du nombre ;
    - un autre (Hassen) a une proposition un peu plus complexe : il distinguait les nombres pairs pour lesquels il proposait prendre la moitié et sur l'exemple qu'il avait choisi, de poursuivre la décomposition et les nombres impairs où prenant l'exemple de 5 son calcul le décomposait en 2 et en 3.

- En ce qui concerne le lemme 3 :

- un élève propose un calcul avec des nombres jusqu'à 7 (Marc) ;
- deux élèves expriment qu'il faut prendre des petits nombres sans donner d'indication complémentaire (Marli et Violette) ;
- les deux élèves (Alexandre et Karim B) qui proposaient des décompositions comprenant des 1, proposent un exemple avec pour l'un aussi des 2 et pour l'autre des 2 et des 3 ;
- onze élèves proposent de recourir aux 2, 3, voire 4, en l'affirmant (Karim A., Sanah), en donnant un exemple (Aïcha, Allison, Hassen, Sadat) de fait, ou même en comparant deux calculs avec des 2 des 3 ou des 4 d'une part et des nombres plus grands d'autre part (Asma, Julie, Patrick, Salim, Sylvain) ;
- un élève propose de ne pas prendre les nombres au-dessus de 5 (Jessy) ;
- une élève parle de décomposition plus longue (Tesnim) mais propose de choisir des nombres entre 2 et 6.

Lors de la séquence menée le 3 mars 1997 nous n'avions pas fait cette analyse, mais nous avions réalisé une classification distinguant les propositions qui pouvaient être traitées collectivement, sans que des élèves qui avaient formulé des réponses erronées ou incomplètes ou très imprécises ne soient conduits à « décrocher », puis de relancer une recherche par petits groupes pour décider de la validité de propositions plus complexes.

b) les échanges sur les propositions produites

Cet échange concerne l'étude d'une des propositions produites par écrit précédemment.

Présentation par l'enseignante : « Pendant la récréation avec Jacques nous avons regardé ce que vous aviez écrit, on a étudié un petit peu toutes vos propositions, et il y a plusieurs choses dont il faudrait qu'on discute un petit peu pour savoir si ce que vous avez proposé est vrai ou faux, si vos propositions sont vraies ou fausses. Alors il y a eu plusieurs propositions dont on va débattre un petit peu, ensemble. »

Formulation de la proposition

M Première proposition certains ont dit que pour trouver le plus grand produit, il suffisait de prendre la moitié d'un nombre quand c'était un nombre pair	*1e proposition*
… non, non c'est pas obligé	critique
M. c'est-à-dire par exemple, l'enfant qui a fait cela nous a donné un exemple, c'était Hassen, tu peux donner ton exemple ?	*Demande de formulation*
Has. J'ai fait pour 8, 4 + 4, puis j'ai fait 2 ça veut dire 2 + 2, ça nous fait 4 et encore 2 + 2 ça nous fait, ça nous a donné le même résultat, c'est-à-dire on peut savoir sous une autre forme ou alors ça peut être…	Exemple de 4 (4 et 6 sont les seuls nombres pairs vérifiant la proposition)
M. Tu avais donné aussi un exemple pour 10, tu avais donné quel exemple pour 10 ?	*Demande de formulation*
Has. Pour 10, j'avais donné 5+5 et puis	explication
M 5+5	
Has. Ouais	
M 5+5, 5+5 et tu t'étais arrêté là	*Sollicitation*

Has.	Ouais	
M.	Tu as trouvé 25	
M.	5+5 et tu t'étais arrêté là.	*Formulation d'un constat*

En fait, la proposition d'Hassen est plus complexe :

> *On doit prendre le multiple [sic] de chaque nombre pour les nombres pairs ex :*
> *4+4 = 8 4x4 = 16*
> *2+2+2+2 = 8 2x2x2x2 = 16*
> *ou prendre les plus petits nombres pour les nombres impairs pour trouver une plus grand nombre.*
> *5+5 = 10 = 5x5 = 25*
> *3+2+3+2 = 10 3x2x3x2 = 36.*

Seule la première partie de la proposition a été prise en compte ici. Mais lors de la mise en commun, qui s'est déroulée dans l'heure qui a suivi la rédaction des propositions, que nous avions triées pendant la récréation, il ne complète pas ce qui est énoncé. La proposition traitée est plutôt celle de Kheir.

Critique de la proposition :

M	Que pensez vous de la proposition d'Hassen Allisson ?	*Sollicitation*
All.	On peut aller plus haut, lui il a fait la moitié. Oui c'est bien ça fait toujours 10	-1e critique - reformulation - négociation (respect de la contrainte)
M	D'accord lui il a fait 5+5	*reformulation*
All.	Mais 5x5 ça fait que 25,	1e argument
…	on peut faire plus *(M écrit)*	
M.	Alors Allison, vas-y, va jusqu'au bout de ta pensée	*encouragement*
All.	Par exemple 5+5 ça fait 10, plus 5x5 ça fait 25. Si on prend un nombre entre 2 et 4 on peut faire des plus grands nombres	2e argument : formulation d'une autre proposition
…	Maîtresse	
M.	Donc que pensez-vous, sans aller plus loin, de la proposition d'Hassen il suffit de prendre la moitié	*Invitation à conclure*
…	non	
M	Salim	*Sollicitation*
Sal.	mais c'est pas bon. Mais… 5+5 on peut le décomposer, ça va faire un plus grand nombre que 25 et en plus…	*2e formulation de la critique associant la décomposition de 5*
M.	Donc la proposition d'Hassen nous paraît	*Invitation à conclure*
…	Pas bonne, fausse	

Recherche d'une preuve

M	Fausse, on peut… C'est vrai que 5+5 on peut encore le décomposer et obtenir un nombre encore plus grand. Que peut-on faire ? Salim.	*Sollicitation d'une preuve*
Sal.	3+2+3+2	décomposition de 5
M	On peut faire 3+2+3+2	*Reformulation*
…	36	
Sal.	3x2, 6	
…	Ça fait 36	*Reformulation*

M	Alors vas-y Salim	*Encouragement*
Sal.	3x2 6, 6 x 3 18	
…	Ça fait 36	
Sal.	3 x2, 6, 6 x 3, 18 ,18x2, 32	
…	36	Correction d'une erreur de calcul
M	Donc on obtient un nombre plus grand	*Conclusion*

Dans cette expérimentation des critiques ont été formulées, et des justifications ont été produites.

3.1.3 Comparaison entre les deux situations :

a) L'activité mathématique des élèves

Dans cette seconde expérimentation, contrairement à la première :

- la question débattue est une proposition d'un élève. Ceci a été rendu possible par l'organisation de cette seconde situation où les élèves formulent par écrit préalablement des propositions qui doivent être vraies pour tous les nombres ;
- des critiques sont formulées par les élèves accompagnées de justifications ;
- des preuves sont proposées (un contre exemple est apporté, une décomposition de 5 est proposée), alors que dans la première expérimentation, une conclusion était tirée sans que des critiques aient été développées par les élèves.

b) Les interactions dialoguées

Alors que dans la première expérimentation les interventions des élèves répondaient aux questions de l'enseignante (il n'y avait pas de critique exprimée par des élèves aux propos de Mikaël), dans la seconde expérimentation, si les prises de parole des élèves s'effectuent sur la sollicitation ou avec l'accord de la maîtresse, ils formulent des critiques aux propositions d'autres élèves.

L'intervention d'Allison met en évidence des possibilités de négociation : non seulement elle affirme son point de vue en critiquant la proposition d'Hassen, mais elle valorise ce qu'il a trouvé, en constatant que la contrainte sur la somme est respectée (« oui c'est bien ça fait toujours 10 ») et elle module son affirmation (« mais 5x5 ça fait que 25»).

Comme nous l'avons vu, dans la première expérimentation, il n'y a pas d'argumentation élaborée par les élèves mais simplement des réponses aux questions de l'enseignante.

c) Les interventions de l'enseignante

Ses interventions destinées à solliciter les élèves, pour qu'ils formulent ou précisent leurs réponses, ne sont pas vraiment différentes entre les deux expérimentations même si dans la seconde expérimentation les élèves sont d'abord sollicités pour exprimer leur point de vue sur une proposition et pas seulement pour formuler des propositions.

Lors de la seconde expérimentation, l'enseignante ne formule pas de conclusion avant que la critique de la proposition n'ait été effectuée.

De plus dans la proposition de décomposition du 5, aucune intervention ne vise à institutionnaliser cette propriété.

3.2 Le rôle du 1

3.2.1 Echanges lors de la première expérimentation (séance du 14/11/94)

M Par contre je vais vous montrer un produit qu'a fait Mikaël avec 3 nombres : il a fait 11+2+1… avec 3 nombres qui peut me le faire ? Mahmadou tu peux calculer le produit -> 13 et 1, 14 alors le produit maintenant	*Nouvelle question*
… 11 fois 2, 22 multiplié par 1 égal 22 …	
… Même 11 on aurait pu le décomposer	
M On aurait pu le décomposer. Est-ce qu'il n'y a pas autre chose qui peut faire que l'on obtient un petit nombre… personne ne voit ? Pourquoi on obtient un petit nombre ? Alors que vous m'avez dit tout à l'heure « avec trois nombres on obtient un plus grand produit »	*Première centration sur la question* *Rappel d'un résultat produit*
… Tu peux faire aussi 12x2 = 24	
… 12x2 = 24	
M: Est-ce que c'est un grand produit ?… regardez bien votre liste Alors que vous m'avez dit tout à l'heure: "avec trois nombres on obtient un plus grand produit"	*Appel à une contradiction potentielle*
Mah. … moyen…	
M : moyen ça ne veut rien dire… Par rapport à tous ceux que nous avons	*Demande de précision*
Mah. Il est plus petit	
M Il est plus petit et pourquoi ? Par rapport à ce que nous avions dit tout à l'heure Latifa	*Relance de la question* *Rappel d'un accord*
? On a pris le plus grand nombre et un petit	
M Et aussi par rapport à ce qu'on avait dit quand on avait 2 nombres on obtient pas forcément un grand produit	*Rappel d'une connaissance partagée*
? Mais là avec celui-ci on obtient un petit nombre	
(Imane) Mais si tu avais fait 12x1x1=12	
M On essaie ce que vient de dire… qu'est-ce qui dans ces deux calculs-là nous fait un petit produit ?…	*Relance de la question*
M et ces petits nombres … soyez plus précis Najat	
Najat C'est parce que l'on multiplie par 1	Justification
… Ah oui	
Saadia Quand on multiplie par 1 ça fait toujours lui même	
M Quand on multiplie par 1 qu'est-ce que cela nous donne	
… ça donne toujours le même nombre	
M ça donne toujours le même nombre	*Formulation de la propriété*

Dans cet échange, nous voyons que les élèves ont des difficultés à identifier la question qui leur est soumise, les interventions de l'enseignante sont orientées vers ce qu'il est pertinent de regarder ; elle rappelle plusieurs fois les résultats qui avaient été acceptés par le groupe.

Lors de la reprise, au début de la séance suivante, Nasradine rappelle qu'on n'utilise pas le chiffre 1. A la question « Pourquoi ? » de l'enseignante les réponses sont : « C'est comme si tu fais 1x2x3, alors c'est pas la peine de mettre le 1 ça fait 2 fois 3 » et « Quand on fait la multiplication par 1… quand on multiplie ça revient au même … ».

3.2.2 Echanges lors de la deuxième expérimentation

Rôle du 1

M Alors beaucoup d'entre vous ont dit : il ne faut pas prendre	
… De grands nombres	
M il ne faut pas prendre de 1. Alors que pensez-vous de cette proposition ? il ne faut pas prendre de 1, Jessica	Sollicitation
Jessica Bah on ne sait pas si par exemple c'est 36 il te reste 1, 36 x 1 ça fait toujours 36	1er exemple (lié aux calculs pour 10 ?)
M Asma	
Asma pour arriver à 10 on fait 1+1 jusqu'à 10 après on fait 1x1 10 fois et après ça fera toujours 1	2e exemple
Jessy Maîtresse c'est comme si on faisait	
M Jessy	
Jessy 9+1 10 alors 9x1, 9 c'est pas un grand nombre	3e Exemple
M Saana	
Saana si par exemple on utilise si par exemple on utilise un 9 le produit doit faire 9 je ne sais pas comment expliquer	Tentative de reformulation de la proposition de Jessy
M Tu ne sais pas comment expliquer Salim	
Salim … On a 25 ça sert à rien le 1 ça sert à rien on aura toujours 25	4e exemple
M Tout le monde est d'accord dans la classe pour dire que le 1 ne sert pas pour le plus grand produit	*Synthèse des interventions et réponses relatives à la proposition*
Saana Si on utilise le 1 ça va faire moins quelque chose par contre si on a 2 le 1 on peut le mettre à part ça va donner le même truc mais ça va …	
M Quand on multiplie un nombre par 1 on obtient à nouveau ce nombre donc le 1 ne sert pas dans un produit	*Reformulation, justification et institutionnalisation d'un résultat*
… Simplement parce que c'est le plus petit	

Dans cette seconde situation d'échange, la proposition « il ne faut pas prendre de 1 » ayant été formulée, l'interrogation sur sa validité est explicite et plus immédiate. Les connaissances pour la critique sont disponibles, sous forme d'évidence partagée plus que propriété déclarée. L'étape correspond bien à une phase de validation. Les élèves peuvent eux-mêmes proposer plusieurs exemples, sans qu'il y ait la certitude, à ce moment, que tous ont compris, les interventions laissent supposer que le constat est partagé, d'autant plus que cinq élèves avaient déjà indiqué cette proposition dans leur écrit.

3.2.3 Comparaison entre les situations

Dans la seconde expérimentation, la formulation préalable de propositions portant sur le rôle du 1 permet la dévolution aux élèves de la justification de cette proposition.

3.3 La question de la précision

3.3.1 Première expérimentation

Geoffrey En prenant plus de nombres, ça donne un plus grand nombre	
M Est-ce que ce que vient de dire Geoffrey est suffisamment précis… Vanessa est-ce que tu pourrais rendre la phrase de Geoffrey plus précise, non tu jouais, qui pourrait aider Geoffrey à être plus précis. Hafid	*Formulation de la question,*
Hafid Si on fait plus de nombres on trouve un grand résultat, si on ne fait pas plus de nombres on trouve de petits résultats	Reformulation en des termes imprécis
M Donc en étant plus précis avec … Mahmadou	*Demande relancée*
Mah. Si on le fait par 2 nombres c'est obligé que l'on fait des petits nombres.	Reprise de la conclusion précédente.
M Des plus petits produits	Correction technique
… Si on choisit que deux nombres on obtient un plus petit produit	
M D'accord ça c'est un premier conseil	
… Avec 3 nombres on obtiendrait un plus grand nombre	
M Avec 3 nombres on obtiendrait un plus grand produit	*Reformulation*
Mah. Si on fait par 3 nombres on obtiendrait un plus grand résultat. Sauf qu'il faut pas utiliser le 1	Conclusion
M Très bien Mahmadou … et dans le choix des nombres moins de 5 et plus que 1	

Cette question de la précision n'est pas traitée en tant que difficulté spécifique. Elle n'émerge pas de contradictions entre résultats antérieurs ou même d'un questionnement des élèves.

De plus les élèves ont du mal à arriver à une formulation précise parce que les propositions ne sont pas indépendantes : on ne peut pas dire qu'en décomposant en trois, on aura toujours un résultat supérieur à ce qu'on obtient par une décomposition en deux, même en excluant le 1 (exemple 2x2x10 = 40 et 7x7 = 49). La question de la précision n'est pas réellement dévolue aux élèves, elle dévie vers une réaffirmation de la conclusion précédente sur le nombre de termes.

Nous ne sommes pas ici dans les conditions d'une phase de validation, mais plutôt une phase de correction, limitée dans son contenu par les flottements liés aux articulations entre les questions laissées à l'initiative d'un élève. Rappelons encore une fois que le choix de ce type d'interventions n'est pas le choix de l'enseignante seule mais un choix partagé.

Les reformulations sont destinées à solliciter l'attention de tous, plus qu'à préciser un propos peu sûr.

3.3.2 Deuxième expérimentation

Question de la précision

M C'est vrai certains ont dit il ne faut pas prendre de grands nombres et d'autres ont dit il faut prendre des petits nombres. Alors que pensez-vous de cette proposition quand on dit il faut prendre des petits nombres, quelqu'un qui n'a pas fait le problème est-ce qu'il peut s'en sortir quand on lui	*Question posée en référence à un interlocuteur extérieur (référence à une exigence scolaire au CM2)*

dit il faut prendre des petits nombres	
Karim il faut prendre des nombres parce qu'après on va nous donner des nombres	
M Jessy	
Jessy Si on prend des grands nombres on va pas avoir beaucoup de nombres si on prend des petits on va avoir beaucoup de petits nombres	Reformulation
M Qu'entend–t-on par petit nombre	*Question directe*
M Hassen	
Has. Par exemple tu fais un nombre avec 12… Quand tu dis 6x6 ça fait 36 alors que tu fais 2+2+… alors que tu fais 2+2+2+… 12 fois ça te fait, tu fais 2x12 un peu plus petit	Explication Hassen revient sur la formulation initiale
M C'est pas très précis ce que tu nous dis	*Critique*
M Justement quand on nous donne comme proposition il faut employer des petits nombres qu'est-ce que	*Relance*
M Karim dit dans tous les cas	
Saana Pour obtenir un grand nombre il faut le mettre en petits nombres pour que cela nous donne un plus grand produit	Reformulation
M Quelle est notre difficulté là actuellement ?	*Relance de l'interrogation*
Jessica 5x5 ça fait 25	
M On en revient toujours au même « petit nombre » qu'est-ce que vous entendiez par là	*Centration sur la question*
Patrick Entre 2 et 4	
M Patrick	
Pat. Les petits nombres qu'il faut prendre c'est le 2, 3, 4	
M Patrick dit il faut prendre 2, 3 et 4 ça c'est plus précis que la proposition il faut prendre des petits nombres : Est-ce que vous vous rendez compte que quand vous dites « il faut prendre des petits nombres » cela manque de précision ?	*Formulation de la critique*
… Ça peut faire plus grand	
M D'accord ce que je voudrais surtout vous faire comprendre là, ce n'est pas une indication suffisante pour pouvoir faire le produit, pour trouver le plus grand produit parce que pour certains les petits nombres c'est 2,3,4 pour d'autres… La seule chose sur laquelle vous êtes d'accord c'est qu'il ne faut pas prendre le 1… Petit nombre votre phrase manque de précision…	*Conclusion*

Dans la seconde expérimentation, la question de la précision est justifiée pour des raisons de compréhension et d'accord nécessaire au sein de la classe ou à l'extérieur.

Il n'y a pas d'argumentation développée par les élèves, mais cet épisode permet de constater les différentes significations d'un terme.

C'est une demande de l'enseignante qui permet de recentrer.

3.3.3 Comparaison

Dans la première expérimentation, la conclusion porte, de fait, non sur la valeur des nombres, mais sur le nombre de termes de la décomposition.

Dans la seconde expérimentation, comme dans la première, la question de la précision est une question qui est posée par l'enseignante. Nous avions déjà vu au chapitre 3, que si le maître ne prend pas en charge cette question, les échanges entre les élèves peuvent se retrouver dans une impasse car, au travers de mêmes expressions, comme « petits nombres » les valeurs numériques auxquelles se réfère chacun peuvent différer. Une proposition comme « il faut des petits nombres » ne peut être alors être validée ou invalidée.

Dans ces épisodes, il n'y a pas de formulation de preuves, ni de développement d'argumentations, il s'agit plutôt d'explications visant à préciser la terminologie.

3.4 Décomposition des nombres

3.4.1 Première expérimentation

Les échanges étant assez longs, plus de 40 minutes, l'analyse de ce passage constitue une étape formée de plusieurs épisodes. Les échanges portent sur la question posée « on utilise les nombres plus petits que 5 et 5 ». La consigne est complétée : « … sur votre feuille, il faudra que vous marquiez ce que vous pensez : est-ce que la proposition est vraie ou fausse, une fois que vous soyez mis d'accord tous les deux il faut marquer pourquoi ».

Les preuves apportées relèvent des constats sur les résultats produits ; des nombres sont proposés aux élèves pour qu'ils éprouvent leurs solutions.

Ces échanges peuvent être segmentés en plusieurs épisodes :

Proposition de décomposition de 5

M On va partir d'un problème qu'ont eu Fatima et Samira… Elles ont cherché pour beaucoup de nombres parce qu'elles ont trouvé rapidement	
… « maintenant on n'arrive pas à trouver un grand produit pour 15 »	
… 5+5+5-> 125	
M Il y en a certainement d'autres qui ont fait des recherches pour 15. Est-ce que l'on peut améliorer le calcul de Fatima et de Samira et pourquoi? Qu'est-ce que l'on fait ?	*Sollicitation, Relance du débat*
… On peut rapetisser le nombre	Proposition
M Rapetisser le nombre qu'est-ce que cela veut dire ?	*Demande de précision*
… On peut le découper autrement	Reformulation de la proposition
M Imane on retient ton idée pour plus tard on va d'abord prendre celle de Saania…Qu'est-ce que tu proposerais Saania comme autre décomposition additive	*La maîtresse donne la parole à Saania*
Saania 2+3+2+3+2+3	Proposition
M Alors ça, ça revient à l'idée d'Imane, Imane redit ce que tu avais dit… Imane avait dit … on peut décomposer le 5… On décompose 5. Est-ce qu'on peut décomposer le 5 autrement… Comment aurait-on pu le décomposer ?	*Reformulation et commentaire*
Mamahdou 4+1, mais il ne faut pas utiliser le 1	Rejet d'une méthode
M L'autre décomposition de 5 est-ce qu'elle peut nous servir ? Ca ne nous donne pas un produit correct, qui nous satisfait du moins	*Reformulation et commentaire*
… On a décomposé le 5 en 2+3	
M Est-ce que quelqu'un a calculé le produit que nous obtenons … Qui a trouvé ? …	

D'autres élèves formulent qu'avec des nombres plus petits que 5 ils ont trouvé des résultats plus grands.

La question du nombre de 2 et de 3 est abordée.

Goeffrey Quand il y a moins de chiffres, là il y a 2+2+2+2+3 et là il y a	
M Geoffrey essaie de t'expliquer et les autres vous l'écoutez	*L'enseignante donne la parole*
… Je sais j'ai compris ce qu'il veut dire	
… Il y a 5	
M Je crois que ce n'était pas cela ta première idée	
Imane En premier il y a 2, 2, 2, 2, 2, 3 et en deuxième il y a 2, 3, 3, 3, 2	Comparaison des calculs
… c'est qu'ils ont inversé sauf qu'ils ont ajouté des chiffres	
M est-ce qu'on a ajouté des chiffres	*Demande de précision*
… non on en a enlevé des chiffres	
M Quelle est la différence entre les deux écritures Sonia	
Sonia …en haut il y a plus de 2 et en bas il y a plus de 3	
M En bas Dans la deuxième écriture, celle qui donne le plus grand produit, il y a plus de 3.	*Conclusion formulée par l'enseignante*

Dans les deux épisodes précédents, des constats sont formulés, à partir d'un calcul ou d'une remarque de certains élèves. Les échanges ne concernent pas des propositions mais essentiellement des valeurs numériques.

Reprise des constats sur 5

M Nous on cherchait à vérifier si on trouvait le plus grand produit en utilisant les nombres plus petits que 5 et 5 et rien que sur 13 et sur 15 nos deux premiers calculs là qu'est-ce que vous pouvez dire déjà Nasradine :	*Rappel de la question*
Nas. avec 5 c'est plus petit	Formulation d'une proposition
M Laissez Nasradine aller jusqu'au bout de son idée	*Gestion et encouragement*
Nas. Avec 5 on obtient des petits produits, des plus petits produits	
M Est-ce que tout le monde a vu cela? … Quand on met un 5 dans notre produit est-ce que cela nous donne le plus grand produit possible ?	*Incertitude sur la nature du constat*
… Ca nous donne un produit mais qui n'est pas le plus grand	
M Est-ce que c'est vrai pour 13…	Choix d'un nombre
… oui	
M on a mis 5 et on obtient 80	
… Ici on a gardé des 5	
… On a décomposé les grands nombres	
M Ici attends Sanna ne va pas trop vite	
Saana là on n'a pas mis de 5	
… il vaut mieux les décomposer, comme cela on a beaucoup plus de nombres à multiplier et ça fait un produit	Justification basée sur un calcul
… maîtresse j'ai remarqué quelque chose	
M On a décomposé les 5 avec des 2 et des 3 et on obtient un produit plus grand, est-ce que c'est vrai pour 15	Deuxième propositions
… Oui aussi	

M Alors Mikaël, qu'est-ce que tu as remarqué…	
Mic. en bas il n'y a que des nombres 3 et 2 et en haut que 4 et 5 et en plus les 4 et 5 c'est plus grand que 2+2 et 80 c'est plus petit que 96 c'est plus petit que 108	Justification basée sur un calcul
M D'accord	
M Ce n'est pas forcément avec	
Mikaël ?Les plus grands chiffres	
M le plus grand nombre que l'on obtient le plus grand produit	
Lat. + M C'est avec des 2 et des 3 que l'on obtient les plus grands produits	

Nous voyons que, dans ce passage, il y a des formulation de propositions par les élèves : le 5 donne des nombres trop petits et il faut mieux utiliser des 2 et des 3.

Application de la décomposition

Puis durant des échanges assez longs, les élèves comparent les produits qu'ils ont obtenus à partir des différentes décompositions.

Les preuves apportées relèvent du constat sur les différents résultats produits. Mais la proposition permettant de remplacer 5 par 2x3 n'est pas explicitement énoncée ni prouvée. En fait ici deux propositions interfèrent, la décomposition de 5 et le nombre de 2 et de 3.

3.4.2 Deuxième expérimentation

La question est traitée à l'occasion de la critique collective de la production d'un groupe. Les élèves avaient à se prononcer sur la validité de deux propositions :

- Proposition n° 1: "Pour obtenir le plus grand produit, il faut prendre 3 ou 4"; cette proposition est fausse, 2 devant être aussi utilisé.
- Proposition n° 2 : "Pour obtenir le plus grand produit il faut prendre des nombres de 2 à 6"; cette proposition est vraie mais elle n'est pas suffisante, 5 et 6 sont à décomposer.

Le groupe de Tesnim, Selim, Hassen pensait que la seconde proposition était vraie.

a) Etude des propositions par groupe

1) Présentation de la tâche : La consigne est : « Vous allez travailler par groupe sur deux propositions que je vais vous donner pour savoir si ces propositions sont vraies ou sont fausses. Au sein de chaque groupe, vous allez discuter si ces propositions sont vraies ou fausses et pourquoi ? »

2) Plusieurs points de vue sont présents dans le groupe de Tesnim, Salim, Hassen, il n'y a pas d'accord dans le groupe, ni sur l'interprétation de la question, ni sur la solution.

- Hassen privilégie la décomposition avec des 2 (et aussi un 6), influencé, peut-être, par la formulation de la proposition : « il faut prendre des nombres de 2 à 6 ».
- Salim privilégie la décomposition avec des 3, mais il ne peut pas développer son point de vue.

- Tesnim semble partager l'avis de Salim ; elle prend de fait la direction des échanges et elle rédige l'affiche du groupe.

Au cours des échanges :

- Hassen perçoit que sa proposition est moins solide que celle de Salim (passage sur les grands nombres, résultats énoncés par Tesnim), mais il ne se rallie pas au point de vue de Salim; pour cela il impose de prendre 13 plutôt que 12 (compte tenu du calcul effectué par Tesnim - et peut-être - du fait qu'il perçoit que pour 13, la décomposition comportera nécessairement d'autres nombres que des 3).
- Tesnim incite le groupe à suivre son interprétation de "entre 2 et 6" comme "on peut choisir les nombres que l'on veut entre 2 et 6": "mais dans 2 à 6 il y a 2, on n'est pas obligé de prendre 6", ce qui lui permet de réduire la contradiction perçue avec les choix les plus efficaces.
- Salim conserve son point de vue (cf. étape suivante).

Dans ce groupe, les élèves ont plutôt « reconstruit » une proposition sur laquelle ils se sont mis d'accord plutôt que de déterminer si les propositions sont justes ou fausses.

b) Productions des autres groupes de cette classe :

- 1^er^ groupe : « Pour obtenir le plus grand produit il faut prendre les chiffres de 2 à 6. » .
- 2^ème^ groupe : « Les deux solutions sont bonnes, mais le 6 et le 5 ne vont pas ex

pas ex	6+2+2 = 6x2x2 = 24	5+3+2 = 5x3x2 = 30	Faux
	4+3+3=>4x3x3= 36	3+3+2+2 = 3x3x2x2 = 36	Bonne

- 3^ème^ groupe : « Nous sommes d'accord avec la solution n° 1 mais il faudrait mettre de 2 à 4 à la place de 3 à 4 parce que les petits nombres commencent à 2 et finissent à 4 car le 1 est trop petit et le 5 est trop grand. On est pas d'accord pour la solution n° 2 parce que : ex: pour 12, 6 + 6 -> 6 x 6 = 36, 3 + 3 + 3 + 3 -> 3 x 3 x 3 x 3 = 81 »;
- 4^ème^ groupe : "Pour trouver un grand produit, il faut prendre des nombres de (~~2 à 4 fait partie de~~) 2 à 6 (~~car 2 et 4 sont dans la partie de 2 à 6~~) [15]

Dans la plupart des groupes, il y a eu, soit des divergences entre plusieurs méthodes (1^er^ groupe) soit accord sur une proposition du type "… de 2 à 4". Les élèves, pour critiquer les propositions, ont commencé, dans chacun des groupes, par produire ce qui leur paraît être la solution. Dans ce cas, la formulation d'un avis exprime une interprétation d'une des propositions rendant celle-ci compatible avec la solution du groupe.

c) Présentation des travaux d'un groupe

Nous avions choisi de commencer la mise en commun par la production du groupe de Hassen, Tesnim, Salim dont la production était la plus intéressante à soumettre à la critique parce qu'elle comportait une ambiguïté : si la proposition formulée est vraie, nécessaire mais non suffisante, la tâche comprise par certains élèves du groupe, qui ont repéré l'inutilité de prendre des 5 ou des 6 ou par d'autres élèves de la classe, est de déterminer l'ensemble des nombres qui sont pertinents (la

[15] les mots rayés le sont sur l'affiche de ce groupe

question tacite est quels nombres choisir, donc quels nombres rejeter). Exprimée en liste de nombres la négation est plus simple à comprendre qu'exprimée sous la forme d'une proposition.

Présentation par Tesnim et Salim des travaux de leur groupe :

Tes Pour… prendre les chiffres de 2 à 6…	
Sal. Si on prenait la première proposition	
M. Vous en êtes à utiliser la deuxième proposition	Cadrage du débat
Tes.. On a pas pris la première et la deuxième on a dit nous on a choisi la première et on a dit si on prenait la première proposition, qu'est-ce que cela ferait.	explication
M. Vous êtes en train de réfléchir pour prendre les nombres de 2 à 6 et vous dîtes que c'est vrai. Vous avez dit que c'est vrai, c'est ça votre conclusion, et les autres vous allez réfléchir.	*Reformulation*
T écrit pour 12 4 x 4 x 4 = 64; 2 x 3 x 4 x 3 = 72	
Et si on prenait la deuxième	
Sal On a mis la première proposition… on a mis des 3 ou des 4, pour 12 on a trouvé 64 on a pris la deuxième proposition, on devait choisir 2 ou 3 ou 5 ou 6 on a trouvé 72 et nous on a choisi 2, 3, 4 et c'est plus grand	Recours à un exemple (statut d'expérience cruciale)
M Que pensez vous du travail de ce groupe.	*Sollicitation de la classe*
Jessy Ils auraient dû mettre des 5 ou des 6 pour voir.	1ère critique
M. Car dans la phrase on dit de mettre des nombres de 2 à 6. C'est vrai que là vous n'avez pris que 2, 3, 4. Si vous aviez utilisé des 5 ou des 6 est-ce que cela irait ? Jessy	*Reformulation*
Jes Non, parce que 3 ou 4, c'est des nombres qui marchent bien. Ils n'ont pas utilisé des 5 ou des 6, si ça marchait bien	Argument à l'appui de la critique
M. Est-ce qu'avec vos exemples, vous avez trouvé que c'était bien, que c'était judicieux, de prendre des 5 ou des 6 avec des exemples corrects est-ce que vous avez prouvé que des 5 ou des 6 c'est des bons nombres?	*Reformulation de la question en doit-on utiliser des 5 ou des 6*
Sal Non, car 5 on peut le décomposer; 5 ça donne moins que si on le décompose.	Expression du point de vue de Salim
M Là vous voulez prouver que c'est vrai ou faux et pour cela il faut les utiliser les 5 ou les 6	*Reformulation*
Sal Si on décompose 5 par 2 et 3 ça va nous donner plus que 5.	
M Ecris ce que tu viens de dire	*La maîtresse aide Salim à s'exprimer*
M Fais tout ton calcul	
Sal Par 10 ça va nous faire 5+5, 5x5 ça va donner 25 et si on décompose 5 par 3 et 2…	
… égal à 10 et on va faire 2x3 6, 6x3 18, 18x 2, 36	justification
… On peut prendre 3+2	
M. Ce qu'on vous demande c'est de dire si ce qui était écrit au tableau était vrai ou faux qu'est-ce que l'on fait on peut prendre des nombres de 2 à 6.	reformulation
M Est-ce qu'il faut utiliser les 5 et les 6 qu'est-ce que cela va nous donner	
M Est-ce que c'est vrai oui ou non	
M Est-ce que vous êtes convaincus que c'est non	

Comme nous l'avons déjà constaté, notamment dans les commentaires précédents sur les travaux de ce groupe, la proposition, produite initialement par Tesnim, n'est pas comprise comme les solutions appartiennent à l'ensemble des nombres compris entre 2 et 6, mais comme sa réciproque les nombres compris entre 2 et 6 constituent la solution du problème. Cela est lié à l'enjeu pour les élèves de trouver les nombres qui sont solutions. La discussion dans le groupe n'a pas permis de trancher entre les solutions proposées dans certains calculs privilégiant les 3 et la position d'autres élèves de ne pas privilégier ces nombres. En fait les élèves formulent des propositions en « il faut » alors que ce qui est pertinent c'est « il suffit » : il faut prendre des nombres de 2 à 4, il suffit de prendre des 2 et des 3.

Cette ambiguïté peut avoir aussi pour cause notamment le décalage entre le travail collectif de critique mené tout au long de la séance qui a conduit plus d'une fois à valoriser (de fait, ou même dans certaines explications) l'intérêt d'une décomposition de 5, et la formulation de la question.

Des arguments sont produits par les élèves soit lors de la justification de leurs propositions, soit lors de la critique des justifications. Ils sont de différents ordres (constats numériques, recours à des contre-exemples, appui sur des propriétés, indication de procédures de calcul) «… 5+5 on peut le décomposer, ça va faire un plus grand nombre que 25 … » (Selim), critique des preuves mettre des 5 ou des 6 pour voir. …non, parce que 3 ou 4, c'est des nombres qui marchent bien. Ils n'ont pas utilisé des 5 ou des 6, si ça marchait bien (Jessy) ».

3.4.3 Comparaisons entre les propositions

Deux différences principales distinguent les deux expérimentation. D'une part lors de la seconde le débat sur les propositions au sein des différents groupes a permis aux élèves de formuler un jugement qui lui-même est soumis à la critique lors de la mise en commun, alors que dans la première expérimentation, ce sont des constats discutés sans engagement préalable des élèves sur les propositions. D'autre part les justifications apportées à la nécessité de décomposer 5 ne semblent pas avoir le même statut, dans la seconde expérimentation cette justification, qui avait déjà été rencontrée précédemment est reprise.

3.5 Combien de 2 ? Combien de 3 ?

3.5.1 Première expérimentation

M Alors maintenant vous allez bien observer les résultats que l'on a au tableau… Ici [2+2+2+2+2+3] ici on a bien… vous y êtes même Vanessa … on a bien que des 2 et des 3 et pour 13 on a obtenu 96 et là [2+3+2+3+3] on a bien que des 2 et des 3 et on a obtenu 108; alors, ici pour 15 [2+3+2+3+2+3] on a fait qu'une solution avec des 2 et des 3 et ici pour 16 on a aussi deux solutions avec des 2 et des 3 mais on en a une qui nous donne un plus grand produit puisque là on a 324 Alors quelle est la différence ? qu'est-ce qui se passe qui fait que dans un cas on obtient un produit plus grand que l'autre ? même si on n'utilise que des 2 et des 3	*Recentration sur la question*
… Il y a plus de 3	Constat

M Alors qu'est-ce qui se passe… Vous avez tous dit qu'il faut garder que des 2 et des 3. Imène as-tu une idée… Rachida	
Rachida par exemple dans 13 la deuxième, il y a moins de chiffres	
M il y a moins de chiffres	
Rach. Non il y a plus de chiffres et ça fait 96	
M est-ce que vous pensez que c'est le nombre de chiffres qui est important ?	*Critique implicite*
… Non	
M Amelle tu as une autre idée	
Ame. dans celui d'en bas, on utilise plus de 3	Deuxième constat
M dans celui là on utilise plus de 3 Regardez… des 3 on en utilise combien dans ces 2 solutions… on en a combien des 3 on en a un seul et ici on en a trois si on prend dans 16 est-ce que l'on peut faire la même remarque vérifie	*Reformulation et proposition d'extension du constat*
… J'ai oublié un 3 c'est tout	
… Oui a multiplié j'ai oublié un 3	
M Alors pour 16 est-ce que l'on peut faire la même remarque pour 16 ? Sébastien viens me le montrer viens l'expliquer aux autres	*Sollicitation*
Sébas. 3 fois 3 fois 3 fois 3 fois 2 fois 2…	
… Alors c'est mieux que faire 2x3x3	
M Combien de 3 dans cette solution	
… Deux	
M et dans l'autre	
… Quatre	
M Alors qu'est-ce que vous en pensez ?	
… Dans la deuxième il y a moins de 3	
M Alors quelle est la meilleure méthode ?	
… Avec les 3	
M Vanessa Par exemple pour 16 avec les 3 on garde on fait le plus de 3 possible et des 2 on n'en met pas beaucoup et comme cela on aura un nombre plus grand	*Reformulation de la conclusion*
? Alors cela serait de prendre le maximum de 3 et le moins possible de 2 pour faire le plus grand produit	
M Est-ce que tout le monde est d'accord avec cette idée, avec cette méthode,	

La preuve développée relève du constat sur quelques exemples. L'enseignante centre sur deux calculs pour généraliser. Il n'y a pas de preuve de cette proposition s'appuyant sur des savoirs mathématiques ; le processus d'échange dans la décomposition additive (trois 2 contre deux 3) n'est pas explicité.

3.5.2 Deuxième expérimentation

Cette reprise a lieu le lundi 3 mars 1997 en début d'après-midi.

Relance de la recherche pour les nombres de 2 à 4

M. Pour un nombre n'importe lequel y a-t-il plusieurs solutions et alors quelle est la meilleure solution dans le choix	*Formulation d'une question*

des nombres ? Comment doit-on choisir ?	
M Qui peut essayer de redire ce qu'il faut chercher	*Sollicitation*
Est-ce que c'est	
…	
M Sur quoi est-on d'accord ?	
Has 2, 3, 4	Rappel des résultats de la matinée
… Pour trouver le plus grand produit d'un nombre on doit utiliser 2, 3 et 4	
M Il y a une chose dont on n'a pas discuté encore	*Reformulation de la question*
Jessy. Combien prendre de 2, de 3, ou de 4 ?	
M Voilà ce que l'on n'a pas décidé ce que l'on n'a pas discuté encore c'est de savoir combien de deux de trois de quatre on n'a pas décidé on n'a pas cherché	*Reformulation de la conclusion*
M. Vous allez travailler par deux [chaque élève et son voisin] et vous mettre d'accord sur cette idée-là quelle est la sur la meilleure solution est-ce qu'il faut prendre beaucoup de 2 de 3 de 4	*Novelle consigne*

Nouvelle mise en commun, quelques minutes plus tard, après une phase de travail par équipe de deux élèves pour répondre à la question.

M. Vous avez tous fait plein de calculs.… Essayez de vous mettre d'accord sur une proposition, de donner une proposition. C'est clair pour tout le monde. Vous arrêtez de calculer ! vous avez assez calculé ; Vous essayez de vous mettre d'accord sur une proposition.	*Relance sur la formulation d'une proposition.* *Dans ce problème les élèves aiment produire de nouvelles solutions pour de nouveaux nombres.*
[Des élèves viennent présenter leurs calculs…]	
M Viens au tableau	*Sollicitation d'un élève*
M Tous ceux qui ont pris 18 doivent être capables d'aider Salim	
… 3+3+3+… -> 729	
… J'ai pris 18 pour les 2… 512	
… Et j'ai fait la même chose avec les 4	

Episode sur les 4

M Quelle remarque pouvez-vous faire entre le calcul avec les 2 et le calcul avec les 4	*Centration sur le lemme 4*
… On obtient le même produit	
M Qui peut essayer d'expliquer pourquoi	*Demande de justification*
… Parce que le 4 est un multiple de 2	
Has Seulement cela va plus vite c'est plus petit ça prend plus de temps	
… 4 ça fait 2+2	
M donc quand on a 2 et 2 ça revient à la même chose	Conclusion

… Alors pour les 3 on ne peut pas trouver 4 ou 2 c'est un nombre impair	
M. Qu'est-ce qu'il est intéressant de faire pour obtenir le plus grand produit	*Relance de la question*
… Hassen	
Has. Tu prends un nombre impair tu auras plus de chance de trouver plus grand	Formulation proche de la deuxième partie de la

		proposition initiale d'Hassen
Karim	Il faut prendre des petits nombres	Retour d'une formulation insuffisamment précise
M	Mais quels petits nombres	
	Il faut prendre des 3 des 4	
M	Là on n'a pas progressé par rapport à la question	*Constat sur l'état des travaux*

M	Maintenant vous devriez être capable de dire pour n'importe quel nombre qu'est-ce qui est intéressant de choisir entre 2, 3 et 4	*Relance de la question*
Jessy	C'est de prendre des 3. Les 3 ça donne le plus grand produit.	1ère proposition
M	Si je donne n'importe quel nombre il faut le décomposer comment	
	En 3	
…	En plusieurs 3 et après entre les 2 et 4	2e proposition
…	On va décomposer le plus en 3.	
	On peut mettre un 2 un 3 un 4 mélangé	3e proposition
…	Est-ce que c'est mieux de mélanger Ecoutez bien jusqu'au …	*Critique implicite*
M	Vous avez remarqué que ce qui donnait le plus grand produit c'est quand on avait beaucoup de 3	
M	Moi je vous ai reposé la question pour n'importe quel nombre on va essayer de décomposer en 3 puis en 2 ou en 4	
…	On va essayer de le décomposer en 3 plutôt qu'en 2 ou 4	
Jessy	Parce que les deux on double et les 3 on triple	
M	Sur un petit exemple qu'est-ce que l'on peut faire Aïcha un tout petit exemple	*Demande de preuve*
Aïcha	Les 2	
Pat	Avec le 3 il y a des résultats que l'on trouve aussi avec des deux et des quatre	
M.	Pourquoi choisit-on des 3 plutôt que des 2 ? Patrick ?	
Pat	Par exemple pour 6.	Choix d'un nombre
M	Tu viens au tableau tu fais pour 6	
M	Stop tout le monde on s'arrête. Quel sera le plus grand produit ?	
M	Vas- y écris le	
Pat	Avec 6 : 3 + 3 -> 3 x 3 = 9;	
Pat	Et si je décompose avec des 2	
Pat	2 + 2 + 2 -> 2 x 2 x 2 = 8	
M	Alors quelle conclusion peut-on tirer entre les 3 et les 2	
M	Bien alors Asma	
Asma	Moi je dis que le 3 c'est mieux parce si on prend le 2 …on multiplie plus et on trouve moins qu'avec des 3	Formulation d'une conclusion

Dans cette deuxième expérimentation, un élève formule le résultat des recherches de la matinée et un autre de ce qui reste à prouver.

Cette dernière question fait l'objet d'une nouvelle recherche.

Dans cette seconde expérimentation, nous pouvons constater que :

- les élèves se sont approprié les questions de recherche successives, voire dans certains cas ils les ont posées eux-mêmes ;
- ils ont produit des preuves.

3.5.3 Comparaison

Une différence entre les deux expérimentations, tient dans la relance de recherche en individuel ou par petits groupes, pour que les élèves puissent formuler un avis sur chacune des questions.

Comme pour les comparaisons précédentes, nous pouvons voir que si les sollicitations, les relances sont fréquentes dans les deux cas, l'enseignante ne formule pas de critique dans le deuxième et n'est pas conduite à faire référence à des résultats orientant les élèves.

4. BILAN SUR CES EXPÉRIMENTATIONS

Ce bilan aborde en premier une synthèse des preuves et argumentations élaborées par les élèves et des conditions, relatives aux situations didactiques favorisant ou non ce développement.

4 .1 Compétences développées par les élèves dans le domaine de la preuve

Les compétences développées par les élèves portent sur la preuve et la rationalité

4.1.1 Les preuves produites

Nous proposons une synthèse à partir des preuves produites pour la seconde expérimentation, en les mettant, le cas échéant, en comparaison avec celles produites lors de la première. ?

Pour l'emploi de plus de deux nombres et le rôle du 1, les différences sensibles dans le traitement de la preuve, portent notamment sur la possibilité donnée aux élèves dans la seconde expérimentation de formuler des propositions et de produire des critiques, qui s'appuient sur des justifications, qui sont des faits numériques.

Pour la question du nombre de termes de la décomposition, nous avons repéré la difficulté à formuler une proposition générale, qui supposerait de distinguer les nombres inférieurs à 7 et ceux supérieurs à 7. Aucun élève n'affirme que la décomposition de 6 en 3x3 serait rejetable car elle n'utilise que deux nombres alors que celle en 2x2x2 en utilise trois. Ceci met aussi en évidence que les résultats produits n'ont pas le degré d'universalité d'un « théorème mathématique » à ce niveau du primaire. Les propositions de fait concernent les domaines qui sont débattus sur le moment.

Le lemme 1 s'appuie sur une évidence partagée qui est formulée comme une propriété explicite, précédée de plusieurs exemples à valeur générique : quand on multiplie par 1 « cela ne sert à rien » où « il vaut mieux ajouter le 1 à un autre nombre». Comme nous l'avons vu lors, d'une part, de la formulation orale par les élèves au début de la seconde séance de la première expérimentation, ou, d'autre part, de l'analyse des propositions individuelles écrites au début de la seconde séance de la deuxième expérimentation, le rôle du 1 correspond à une connaissance qui semble largement partagée (seuls deux élèves ont des propositions erronées). Dans le même ordre d'idée, il y a eu, lors de la première séance de la seconde expérimentation un échange sur la commutativité de la multiplication à la suite d'une interrogation d'une élève (les produits seraient-ils différents si on les écrivait dans un autre ordre) ?

Pour le lemme 3, les preuves produites lors des débats sur des propositions, dans la seconde expérimentation, d'abord par un travail en groupe, puis lors de mises en commun, sont :

- des contre-exemples, montrant que l'on peut trouver des plus grands produits ;
- le recours à des faits numériques établis pour 5.

Mais si la question d'intégrer 5 dans les nombres qui sont pertinents (dans les premières phases des recherches, avant la production des solutions (« est-il un petit nombre ?») s'est posée, peu d'élèves la posent pour 6 et ceux qui incorporent 7 dans les nombres solutions ont en général effectué très peu d'essais. Au dessus de 6 il est assez partagé, sans que cela soit exprimé et, à plus forte raison, prouvé systématiquement que ces nombres ne sont pas solution.

En reprenant la liste établie au chapitre précédent, nous pouvons constater la production de preuves valides :

- des justifications (nécessaires et suffisantes) par appel à une propriété ou un raisonnement), et en particulier le contre-exemple ;
- des justifications nécessaires mais non suffisantes : ce sont des propositions mathématiques vraies mais qui à elles seules ne prouvent pas la proposition visée ;
- des exemples génériques ;
- des formulations imprécises ou ambiguëss.

Les justifications non valides sont essentiellement constituées par quelques absences de justification, formulations redondantes, ou description de la tâche, ou des justifications basées sur des exemples.

4.1.2 Les difficultés

Les expérimentations analysées dans cette étude ont été réalisées dans des milieux défavorisés et deux des caractéristiques principales pour le déroulement des séquences concernent, d'une part, les limites dans les capacités langagières de formulation de la pensée mathématique, et, d'autre part, la plus grande difficulté, pour certains élèves à recourir à des connaissances qui ne sont pas rappelées dans la situation. Nous voyons par exemple que, lors de la seconde expérimentation, certains élèves comme Salim, ont besoin d'être sollicités pour pouvoir formuler jusqu'au bout leur avis.

a) le vocabulaire

Nous avons vu que les imprécisions dans le vocabulaire, que cela soit la confusion entre chiffre et nombre, ou les imprécisions posées par les recours à des expressions comme « petits nombres » doivent être traitées sur l'initiative du maître, sous peine de maintenir une ambiguïté qui peut n'apparaître que trop tardivement si les propositions sont principalement formulées dans ces termes.

Par ailleurs les difficultés pour formuler des expressions générales se rencontrent fréquemment, en tous cas dans les classes dans lesquelles ces expérimentations ont eu lieu, et constituent une des limites langagières pouvant rendre difficile le fait de se dégager d'exemples génériques.

b) les connaissances

La distinction entre la somme des termes et leur produit semble très vite comprise ; il peut encore demeurer des erreurs portant sur des produits apparemment plus grands mais qui utilisent des termes dont la somme est supérieure au nombre de départ.

Cette situation ne s'oppose pas réellement à des conceptions antérieures des élèves qui constitueraient des obstacles à sa résolution. Toutefois deux « nouveautés » de cette situation concernent la multiplication : la première est que les élèves opèrent sur des produits de plus de deux termes, ce qui constitue quelquefois une situation nouvelle pour certains élèves habitués à ne faire le produit que de deux nombres, la seconde est que l'on obtient les plus grands produits avec des petits nombres.

Le problème des grands nombres, (la solution produite est-elle valable pour les grands nombres ?) n'est pas résolu dans cette situation. Lors de la première expérimentation une élève remarque que : « pas vraiment pour n'importe quel nombre ; … si on prend un nombre qui est grand… 100 par exemple… on devrait utiliser des grands nombres et des petits nombres, avec des petits nombres, on n'y arriverait pas… Rappelons que dans sa présentation (cf Chapitre 3), le champ numérique avait été limité à 20 ou 30. Ce problème de la généralisation de la solution aux grands nombres se heurte en effet à trois obstacles observés :

- le premier réside dans la difficulté de représentation d'un grand nombre, et à plus forte raison d'un produit dont la somme des facteurs pourrait être ce grand nombre. Pour beaucoup d'élèves la seule proposition est 10x10x…x10.
- le second est de calculer 10x10x …10 et peut-être aussi de le nommer, et plus encore de calculer une décomposition de ce nombre avec des 2 et des 3.
- le troisième est de comprendre l'universalité des propositions établies pour des nombres de l'ordre de 20. Ce problème pourrait être traité – une expérimentation menée avec des élèves CM2 en 1995/96 a mis en évidence que le problème : « comment modifier le produit …x3x5x10x2x8x5x… pour l'améliorer » permettait aux élèves de remplacer dans un premier temps les nombres supérieurs à 3 par des produits de deux nombres dans une optique d'optimisation (traiter le problème localement) sans avoir à calculer le produit. La justification de l'optimisation s'appuie sur les lemmes qui donnent des moyens d'améliorer et non sur le résultat global.

4.1.3 Les niveaux de rationalité

Les niveaux de preuve semblent être, comme nous l'avons vu :

- des contre-exemples produits pour infirmer certaines propositions,
- des exemples génériques produits par les élèves,
- des propriétés admises, établies et utilisées comme preuve.

Rappelons que ces compétences sont sollicitées dans plusieurs situations.

Il peut être parfois difficile de dire de façon assurée, dans la mesure où les résultats produits portent sur des calculs sur des valeurs précises, quelle est la frontière entre les preuves de type exemple générique, et ce qui est particulier ; le risque existant de prendre pour une connaissance étendue et partagée par toute la classe ce qui serait simplement compris par certains comme spécifique à certains nombres.

Nous nous heurtons là aux limites habituelles des interactions entre élèves ou entre maître et élèves, dans des moments assez courts, sur des contenus qui ne mettent pas en jeu des conceptions fortement ancrées chez les élèves, même si les évaluations menées dans d'autres classes (cf ch 3) après les mises en commun montrent que les élèves ont bien recours aux méthodes de calcul valorisées dans cette recherche.

Par ailleurs une question, relevant de la rationalité à laquelle peuvent accéder les élèves de CM est posée par certaines formulations comme « Pour obtenir le plus grand produit il faut prendre des nombres de 2 à 6 ». Nous avons vu qu'il existe une différence entre l'interprétation que nous faisons en disant que les solutions appartiennent à cet ensemble, et, l'interprétation de certains élèves qui recherchent de fait de l'ensemble minimal des solutions.

Ce type de propositions qui formule un encadrement et réunit deux conditions est peut être d'autant plus difficile à traiter que les élèves ne peuvent accéder que très difficilement au critère exprimé par N.Balacheff (1988 p 71) : pour prendre conscience d'une contradiction sont nécessaires : « l'existence d'un attendu : prédiction ou anticipation ; la possibilité de construire l'affirmation associée à cet attendu et sa négation ». Ce dernier point pose problème, la négation étant ici « on peut prendre des nombres égaux à 1 ou supérieurs ou égaux à 7.

4.2 Les compétences argumentatives

a) la formulation des propositions

Nous avons vu que les élèves sont capables de produire des propositions, sous certaines conditions, relatives aux situations.

Par ailleurs dans les travaux en groupe, les élèves produisent souvent leur solution propre, et, dans un second temps portent un jugement sur les propositions qui leur sont soumises par comparaison avec la solution à laquelle ils ont abouti. Comme souvent, les arguments qui les amènent à produire ou préférer telle solution peuvent relever de plusieurs registres (nature de la solution proposée, clarté ou force des arguments, référence à des contextes scolaires, ascendant personnel, niveau mathématique reconnu…). L'importance d'une mise en commun qui suit ces échanges est aussi de rendre public et d'expliciter des critères partagés pour l'analyse des résultats et critiques.

La résolution sollicite une coopération effective de la classe, car tous les élèves ne perçoivent pas d'eux-mêmes, sans le recours à la confrontation avec les autres, la nécessité de prouver, ni ne peuvent chacun, isolément, apporter la preuve de leur solution ; ils sont obligés de formuler leur méthode, donc de l'identifier ; ils comprennent aussi qu'ils ont besoin d'utiliser des termes précis pour communiquer leurs propositions et pour débattre. Pour que s'installe cette véritable coopération. Les groupes peuvent être composés selon différents critères :

- élèves ayant des propositions différentes,
- élèves n'ayant pas forcément des compétences reconnues en mathématiques mais capables d'entrer dans le point de vue d'un camarade et d'oser l'affronter,
- association d'élèves « forts » et d'élèves « faibles » en espérant un phénomène de contagion du raisonnement des « performants » au bénéfice des faibles.

b) les justifications

Les arguments avancés par les élèves, dans les phases de mise en commun sont d'ordre mathématique. Dans les deux expérimentations, les justifications produites restent dans le champ des mathématiques.

Dans les échanges en groupe, les enregistrements lors de la seconde expérimentation, montrent l'existence de quelques arguments d'ordre scolaire (hypothèses sur ce que souhaite la maîtresse).

Ce constat conforte celui annoncé à la fin du chapitre 4, sur la possibilité des élèves du cycle 3 de recourir en mathématique à des *argumentations spécifiques* à ce domaine

c) les aspects dialogiques

Les argumentations produites par les élèves sont différentes, non seulement les élèves formulent davantage de critiques dans la seconde expérimentation, mais elles sont souvent appuyées de justifications, voire quelquefois de négociations (Allison, Tesnim, Patrick…) ce qui est rendu possible par le fait que la maîtresse fait porter le débat sur des points plus précis.

4.3 Conditions sur les situations

Les différences quant à la structuration des situations ont déjà été évoquées : la seconde expérimentation pose explicitement un problème de preuve à partir des propositions produites par les élèves. Rappelons toutefois que dans les deux cas, il existe une séparation entre des phases de recherche pour des valeurs particulières et des phases de production de propositions générales.

La succession des questions abordées semble voisine entre les deux situations. Pourtant des différences sont importantes sur ce qui est prouvé dans chacune des classes et sur la manière dont les propositions sont établies. Comme nous l'avons vu, les principales différences dans la structure des deux situations tiennent à ce que des propositions ont été formulées comme telles dans la seconde expérimentation et sont débattues de façon spécifique lors des mises en commun avec, dans la plupart des cas une dévolution de la critique aux élèves.

Dans les deux expérimentations il y a une situation d'action au sens de la théorie des situations : les élèves ont à produire une solution, dans le cas de la recherche pour des valeurs particulières. Par contre le statut et le traitement de leurs propositions de méthode générale diffère. Dans la première situation, la situation de validation ne peut se dérouler de manière efficace car les propositions produites ne sont pas nettement présentées comme des réponses à une nouvelle recherche : celle de la solution générale ; elles apparaissent plutôt comme une « extension » naturelle de la recherche pour des valeurs particulières. Dans ce sens il n'y a pas dévolution d'une situation de formulation spécifique. Du point de vue du raisonnement, la différence entre la production d'inductions (ou abductions) pour généraliser et de déductions pour prouver n'est pas pris en compte pour la constitution du milieu. Nous pouvons faire l'hypothèse que, dans ces situations de preuve, si le contrat didactique relatif aux différentes phases est adéquat, les critères de validité ne sont pas dès l'origine des connaissances partagées. La mise en place d'une situation de validation suppose que les critères utilisés successivement (contre-exemple, disjonction des cas…) soient mis en œuvre de façon explicite même s'ils ne sont pas des objets d'étude.

a) Traitement des questions : « Combien de 2 ? Combien de 3 ? ». Bilan d'une expérimentation complémentaire

Une interrogation sur l'organisation de la validation, posée notamment par cette situation porte sur le traitement des questions intermédiaires :

- quand faut-il relancer la production de jugements sur ces questions? Jugements qui seront suivis ensuite d'une mise en commun
- quand est-il suffisant d'effectuer directement une mise en commun, sans effectuer une nouvelle prise de position des élèves?

Une expérimentation complémentaire conduite en 2006 apporte un éclairage à cette interrogation. Elle a été menée pour cette même situation du *Plus grand produit*, en 2006 dans la classe de CM1 de Dominique Lhotelier à l'école des Provinces Françaises à Nanterre, avec qui de nombreuses expérimentations avaient été conduites en 1996/97 en CM1 puis en CM2. La structuration de la séquence est celle proposée dans ERMEL CM1 (1997).

Dans cette classe, les élèves avaient, lors de deux courtes séances, cherché le plus grand produit pour 10 et 14 le premier jour, puis pour 16 le second : les multiples activités à cette époque de l'année rendant plus complexe la mise en place d'une séance plus longue sur ce problème. Trois jours plus tard ils ont eu à formuler des propositions.

Compte tenu des propositions produites par les élèves au début de la séance (cf. Annexe n°4 : huit élèves proposaient d'utiliser des 2, des 3 ou des 4, huit élèves proposaient d'utiliser des petits nombres mais pas le 1, deux élèves des petits nombres seulement, deux élèves des nombres supérieurs à 4 et deux autres n'avaient pas de proposition apportant des informations), il semblait possible de débattre directement de la question du nombre de 2 et de 3, sans repasser par la production individuelle d'un nouvel avis et de sa justification par les élèves. Mais, lors de ce débat, si beaucoup d'élèves sont intervenus, la proposition « Combien de 2 ? combien de 3 ? » n'a pas été l'objet d'un engagement individuel sur sa validité. Le statut des exemples discutés ne prenait donc pas toujours celui d'exemple générique. Cette expérimentation renforce donc la nécessité d'un engagement explicite des élèves sur des propositions préalablement au débat.

Par rapport à la situation du plus grand produit, les élèves les plus faibles sont capables de chercher dans des décompositions additives d'un nombre, celle(s) dont le produit des termes est le plus grand. Ils font des essais successifs sans pour autant en tirer des conclusions. Ils peuvent émettent des propositions mais sans réellement pouvoir démontrer ce qu'ils avancent

b) Le rôle de l'expérimentation dans la construction de cette situation

Pour la première expérimentation, l'analyse mathématique du problème - qui avait été faite préalablement, ne donnait pas suffisamment d'indication sur les procédures que les élèves allaient produire, compte tenu de la nouveauté de la situation. La question principale étant qu'est-ce qui est du ressort des élèves dans cette situation, et donc la question des objectifs : qu'est-ce que les élèves apprennent dans cette situation comment articuler les recherches individuelles et le problème général. Dans cette organisation, les productions des élèves sont traitées de façon « classique » par la maîtresse, qui choisit certaines qui sont critiquées au fur et à mesure par la classe.

La question de la preuve est posée quelquefois en termes de vérification de solution pour des valeurs particulières et non de validation de proposition générale. Dans cette première expérimentation il n'y a pas de dévolution de preuve, l'approche reste basée sur la comparaison de calculs, il n'y a pas de formulation de proposition : les débats portent sur des constats immédiats.

Nous voyons donc que les modifications introduites dans la situation ont permis un travail de preuve ; des contre-exemples ont été produits, des formulations générales ont été élaborées, le recours à des propriétés mathématiques pour prouver une proposition a été mis en place.

c) Le rôle du maître

Si les interventions de l'enseignante visant la sollicitation des élèves (aides à la formulation, la relance du débat…) ne sont pas notoirement différentes dans les deux expérimentations.

De plus à partir d'une situation didactique d'autres choix pédagogiques sont possibles, par exemple l'ensemble des propositions étant affiché, la classe aurait à se prononcer dans un premier temps pour déterminer celles auxquelles on peut répondre rapidement, ou le fait de travailler en groupe sous telle ou telle forme.

Une discussion fréquente entre les membres de l'équipe ERMEL dans la comparaison des expérimentations conduites dans des milieux sociaux différents, lors de la recherche INRP «Apprentissages mathématiques et argumentations au cycle 3 » portait sur le rôle du maître lors de ces mises en commun. Dans certaines classes, et la situation étudiée dans le chapitre suivant le montre, le maître peut ne pas avoir à intervenir pour organiser la prise de parole ou « gérer les débats ». Pour certains collègues existe-t-il réellement une dévolution de la validation si le maître intervient dans les débats ?

Les résultats de ces expérimentations montrent que cela est possible sans que cela porte préjudice à la dévolution du travail de preuve. Nous voyons aussi que le positionnement de l'enseignante évolue quant aux propositions soumises à la critique : non seulement ce n'est plus au cours du débat qu'elle choisit ce qui est à critiquer, cela a été fait avant, mais les inductions de critiques ou les prises de position de l'enseignante sur les productions sont rares.

Pour clarifier les compétences du maître sollicitées dans ces phases de mises en commun et leur appropriation par des enseignants débutants, nous avons conduit une recherche spécifique sur la gestion des mises en commun par des maîtres débutants, et produit des outils d'analyse qui seront utilisés dans le chapitre suivant.

5. CONCLUSIONS

La spécificité de ce problème (un problème pour des valeurs particulières, puis un problème général, nécessitant une rupture entre les deux), alors que dans les autres situations un problème d'impossibilité ou d'exhaustivité permet de se dégager des valeurs numériques (avant d'aborder la question de la généralisation), suppose de proposer une organisation très structurée de la situation.

Les améliorations entre les deux expérimentations peuvent avoir plusieurs causes en particulier :

- certaines, spécifiques à la situation, que nous avons analysées ;

- d'autres relatives aux compétences des élèves ; elles peuvent être liées au fait que les situations proposées constituaient un ensemble plus complet dans la diversité et la quantité de problèmes posés (cf Chapitres 2 et 3) proposant des problèmes de preuve plus riches pour les élèves et plus cohérent dans des attentes et les compétences communes, amenait :

  - à développer d'autres capacités méthodologiques,
  - à reconnaître quelles étaient les attentes du maître dans ces situations :
    - au niveau de la résolution de problèmes ouverts,
    - au niveau des problèmes de preuve ,
  - à créer un climat favorable au débat dans la classe

- dans la compréhension par les enseignants des enjeux de ces situations et des effets de leurs interventions.

Chapitre 5 :
PROBLEMES DE PREUVE ET GESTION DES MISES EN COMMUN

1. QUESTIONS ABORDEES

Les situations présentées dans les chapitres précédents ont été expérimentées dans le cadre de l'élaboration d'un dispositif d'enseignement destiné à être utilisé dans des conditions ordinaires par des maîtres. En particulier elles comportent des mises en commun qui permettent la formulation des solutions, leur critique, et, en général s'articulent avec une synthèse où le maître met en évidence ce qui a été découvert ou approfondi.

Or ces phases sont relativement complexes à gérer par les enseignants pour plusieurs raisons. En effet, ils doivent identifier les connaissances visées, analyser les productions issues des recherches préalables, mettre en place les conditions du débat, permettre la formulation, la compréhension et la critique des productions, garantir que les critères de jugement émergeant lors de ces échanges soient compatibles avec ceux de la rationalité mathématique. De plus, dans les situations analysées dans cette étude, qui ne visent pas l'acquisition d'une notion, la question se pose de ce qui peut être l'objet d'une institutionnalisation. Certains de ces choix relèvent d'une analyse préalable, d'autres de décisions qui doivent être prises lors de la mise en commun.

L'analyse des enjeux liés à la mise en œuvre des mises en commun dans des conditions ordinaires, conduit donc à se poser plusieurs questions :

- Quels sont les objectifs de ces mises en commun ?
- Quelles sont les décisions que l'enseignant peut ou doit prendre lors de ces phases ? Quelles sont les compétences professionnelles sollicitées dans la conduite de ces phases ? Quelles sont les difficultés faisant obstacle à leur maîtrise ?
- Quelles sont les problématiques de formation sur ces questions ?

2. ANALYSE DE LA TÂCHE

Les mises en commun analysées dans cette étude sont, au sens où le précise Margolinas, des phases de validation et non des phases de correction. Il s'agit pour le maître ni de formuler lui-même la réponse ou les critiques aux productions des élèves, ni de solliciter quelques élèves aux connaissances mathématiques reconnues pour qu'ils le fassent « à sa place ». Ce ne sont pas non plus des simples phases d'explicitation de procédures qui ne seraient pas suivies d'une critique de celles-ci et qui pourraient laisser croire que l'important est que chacun utilise une méthode personnelle.

Dans les situations présentées dans cette étude, les mises en commun ne visent pas en général l'acquisition de connaissances qui s'intègreraient dans une progression sur des savoirs ; si des propriétés mathématiques sont mises en évidence, leur acquisition ne constitue pas la finalité première de la situation. Pourtant, comme nous l'avons vu, ces mises en commun ont un objectif qui n'est pas simplement de permettre aux élèves de formuler leurs réponses, de mieux expliciter leur pensée, ou même de trouver un langage commun ou de mettre en évidence une diversité de démarches ou de procédures, mais d'élaborer et de valider des propositions.

2.1 La diversité des objectifs et des critères

Comme nous l'avons vu au chapitre 3 les productions soumises à la critique sont différentes selon les problèmes traités : elles sont constituées par des résultats numériques, des procédures, des propositions. De plus les critères de jugements peuvent aussi être différents dans les mises en commun pour une même situation.

Lors de la résolution des problèmes qui précèdent les problèmes de preuve, pour la recherche pour des valeurs numériques particulières, la fonction de la mise en commun est de vérifier que les solutions respectent bien les contraintes du problème et d'expliciter des méthodes qui ont permis de les produire, en analysant les causes des erreurs ou des difficultés dans la gestion de certaines procédures. L'objectif est de permettre aux élèves d'identifier comment produire et gérer des essais successifs, à partir, par exemple, d'une meilleure évaluation de l'écart entre la solution produite et le but à atteindre. Cet objectif sera commun à un ensemble de problèmes, en particulier les premières phases des situations analysées dans cette étude. Dans ce type de mise en commun, l'objectif est principalement méthodologique. Il s'agit de mettre en évidence les possibilités dont disposent les élèves, d'une part pour contrôler eux-mêmes leurs productions et d'autre part pour produire et gérer des essais, pour émettre des hypothèses et les valider. Mais, comme nous l'avons vu au chapitre 1, ces situations n'ont pas pour objet de décrire un mode d'emploi qui serait valable pour la résolution de tous les problèmes. Les procédures mises en valeur sont provisoires : dans les années qui suivent, la maîtrise de la division, l'utilisation des nombres décimaux, l'emploi de systèmes d'équations, ou même simplement l'usage de notations littérales, permettront le recours à des procédures plus performantes ou expertes. Les critères de jugement en jeu dans ces mises en commun concernent l'efficacité des procédures : leur économie, leur fiabilité, leur rapidité, leur universalité.

Dans la recherche de preuves portant sur l'impossibilité ou l'optimisation d'une solution, lors de la seconde phase de certaines des situations proposées, les objectifs visés sont de valoriser la production de preuves s'appuyant sur des raisonnements (déduction, disjonction des cas), et de permettre la critique de propositions erronées en mettant notamment en évidence le rôle du contre-exemple. Le critère de jugement n'est plus l'efficacité de la méthode, mais la validité du raisonnement.

De plus, pour certains problèmes portant sur les conditions d'existence des solutions, ce sont des propriétés qui sont mises en évidence ; ces propriétés pourront devenir des savoirs à connaître, comme dans la troisième mise en commun des trois nombres qui se suivent.

Comme nous l'avons vu pour la situation *Les trois nombres qui se suivent*, ces trois types de mises en commun, qui peuvent se rencontrer dans la même situation, ont des objectifs différents : méthodologiques sur l'efficacité de la procédure pour la première, relevant de la rationalité sur la validité du raisonnement pour la seconde, portant sur des connaissances pour la troisième. Il est donc nécessaire, pour que l'enseignant puisse conduire à bien la mise en commun, qu'il en comprenne la diversité des enjeux.

2.2 Les tâches de l'enseignant

Les tâches de l'enseignant lors de la préparation ou de la conduite de mises en commun sont multiples. Il doit :

a) Analyser préalablement à la mise en commun l'ensemble des productions pour en définir les principales catégories à traiter selon la qualité des productions (propositions ou méthodes) qui peuvent être adéquates, partielles mais avec des méthodes cohérentes avec le problème, erronées…

b) Fixer un objectif à la mise en commun, ce que les élèves peuvent acquérir à son issue et qui est fonction, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, de l'enjeu de la situation (méthode, rationalité, propriété) et n'est en général pas identique pour tous les élèves ;

c) Organiser la critique des productions pour préparer les échanges :

- Choisir les supports : travaux collectifs ou non, types d'écrits…
- Déterminer un ordre de traitement des productions

d) Conduire la mise en commun :

- Donner aux élèves la charge de la critique.
- Assurer le bon déroulement des échanges.
- Solliciter ou relancer certains élèves (en particulier ceux dont les connaissances ou les capacités d'expression sont les moins assurées ainsi que ceux qui ont produit des résultats ou des méthodes erronées).
- Faire reformuler si nécessaire.

e) Choisir une sortie pour la mise en commun. Celle-ci, en effet, conduit à des évolutions différentes suivant notamment ce que les élèves avaient produit préalablement ; pour certains il peut y avoir amélioration de la méthode ou de la formulation, prise de conscience des erreurs, compréhension d'une méthode plus pertinente; pour d'autres la mise en commun reste insuffisante pour garantir la compréhension d'une méthode plus efficace. La diversité des évolutions des élèves est à prendre en compte dans la gestion de la mise en commun. Le maître peut être amené à :

- Décider d'une relance éventuelle.
- Décider d'une phase de conclusion.
- Proposer une situation voisine si nécessaire pour permettre le réinvestissement des procédures explicitées, soit pour tous ou pour certains élèves avec éventuellement des choix de différenciation.

2.3 La gestion de la mise en commun par des enseignants débutants

Certaines de ces compétences sont plus difficiles encore à maîtriser pour des professeurs des écoles débutants. Quelques membres de l'équipe ERMEL[16] ont cherché à analyser ces choix et les difficultés liées à la mise en œuvre de mises en commun proposées par des enseignants ayant quelques années d'exercice lors de la recherche INRP « Evaluations et développements de dispositifs d'enseignement en mathématiques ». Nous avions analysé des mises en commun portant sur les mêmes situations d'apprentissage menées par quelques jeunes enseignants. Ces situations, relatives à des propriétés permettant la comparaison de décimaux ou à l'indépendance de l'aire et du périmètre de figures planes en fin de CM1, avaient été produites dans le cadre de la recherche « Apprentissages numériques et argumentation au cycle 3 ». Ces dispositifs d'enseignement (ERMEL CM1) étaient publiés depuis plus de deux ans et

[16] Henri-Claude Argaud (IUFM de Grenoble), Jacques Douaire, Marie-Paule Dussuc (IUFM de Lyon), Christiane Hubert (IUFM de Créteil), Claude Rajain (IUFM de Reims), Gérard Yvroud (CPAIEN Isère) ; responsable J.Douaire.

étaient utilisés dans leur ensemble par les enseignants concernés, qui avaient fait le choix de proposer de façon habituelle les activités de recherche proposées dans ces dispositifs.

Nous cherchions à repérer les écarts pouvant exister entre l'activité mathématique réelle des élèves et ce qui était prévu dans ces dispositifs d'enseignement que nous avions expérimentés. Nous avions fait l'hypothèse que ces écarts éventuels avaient des causes pouvant porter sur l'insuffisance de l'analyse préalable des productions des élèves, les difficultés même de conduite des débats, la sous-estimation du rôle des mises en commun et de la nécessité pour les élèves d'avoir la charge de la preuve. Deux critères nous semblaient intéressants pour l'analyse de ces séquences : l'existence d'enchaînements de prises de paroles entre les élèves (et non une alternance maître/élève dans les échanges) et la formulation de critiques par les élèves eux-mêmes aux propositions d'autres.

Les observations des classes, l'analyse du travail mathématique de l'élève et des interventions de l'enseignant, les entretiens avec ceux-ci nous ont conduits à des conclusions différentes de ce que nous supposions. Nous avions constaté que, si ces jeunes enseignants analysaient de façon adéquate les productions des élèves préalablement à la mise en commun et ne rencontraient pas de difficultés ou d'appréhension dans la conduite des échanges, des différences importantes existaient sur la place donnée aux élèves dans la formulation de critiques sur les productions produites ; dans certaines classes celle-ci relevait du maître, dans d'autres les élèves en étaient responsables. Nous avions aussi constaté, lors des entretiens, que dans tous les cas, ces mises en commun ne faisaient pas l'objet d'interrogations préalables quant à leur organisation, mais relevaient d'une coutume propre à chacun des enseignants.

Pour ces raisons, nous avons choisi d'analyser la gestion d'une mise en commun portant sur une des situations de recherche analysées dans cette étude, par un enseignant ayant quelques années d'exercice, car elle pouvait fournir des informations sur les compétences professionnelles sollicitées et les questions de formation associées à leur acquisition.

3- ANALYSE DES ÉCHANGES LORS D'UNE MISE EN COMMUN

3.1 Présentation de l'expérimentation

La situation choisie avec l'enseignante concernée était la situation *Cordes* qui était proposée en fin d'année. L'enseignante utilisait le descriptif de la situation publié dans ERMEL CM2, dont elle suivait la progression, avec les données proposées pour chacune des phases de la recherche.[17]

Les cadres d'analyse relatifs aux situations didactiques, aux processus de preuve et aux débats argumentatifs ayant été exposés dans le chapitre 1, ce paragraphe précise la méthodologie de l'étude.

Au chapitre précédent nous avons présenté les outils d'analyse des interactions langagières. En particulier nous avions proposé une segmentation (étape de la séquence, épisodes tours de parole, énonciations) et une grille d'analyse des interventions des élèves et de celles du maître. Nous renvoyons au paragraphe 1.4.1

[17] La séance de la situation *Cordes* analysée dans ce chapitre a été enregistrée en juin 2004.

du chapitre 4 pour la présentation de ces outils que nous utiliserons aussi dans ce chapitre.

3.2 Insertion de cette observation dans une problématique de formation

L'analyse de la gestion par un enseignant ayant quelques années d'exercice, dégagé des questions éventuelles de conduite de la classe, d'une mise en commun d'une situation de recherche visait à préciser les décisions que l'enseignant prend lors de ces phases et à repérer les difficultés rencontrées dans la mise en œuvre de ces phases. De plus, cette question constitue un enjeu de formation qui ne se limite pas aux mathématiques. En effet un même maître peut proposer des mises en commun dans différentes disciplines. Si les fonctions socialisantes basées sur l'écoute, et le rôle de ces échanges dans la maîtrise de la langue peuvent être partagés, des fonctions spécifiques liées à l'objet de l'apprentissage, comme nous l'avons vu précédemment pour les mathématiques, ou à l'épistémologie existent. Aussi, dans le cadre de l'équipe en projet (INRP/IUFM) « Pratiques langagières et construction de savoirs », une équipe de l'IUFM de Versailles[18] a comparé les fonctions et la gestion des mises en commun dans trois disciplines : français, mathématiques et SVT. Il s'agissait pour nous, en nous centrant sur une pratique scolaire à laquelle on puisse associer des pratiques de formation d'expliciter ce qui, dans cette pratique, est commun et ce qui est spécifique aux disciplines étudiées, mais aussi d'analyser les compétences professionnelles requises, les difficultés et les choix effectués par les enseignants débutants en liaison avec des connaissances mobilisées, mobilisables ou lacunaires, et enfin d'identifier les éléments pouvant être pris en charge par la formation. Dans ce but nous avions notamment choisi d'étudier trois mises en commun gérées en CM2 par une même enseignante en début de carrière. Cette expérimentation a eu lieu en fin d'année, dans une classe située non en ZEP mais en REP.

Nous étudions ici la mise en commun en mathématiques sur la situation *Cordes*

3.3 Présentation de la séance

Dans cette séquence, les élèves produisent individuellement, puis confrontent par petits groupes leurs solutions pour les trois valeurs numériques données successivement (6, 10 et 210). Les productions des groupes sont affichées au début de la mise en commun.

Une mise en commun suit chacune de ces recherches. La première mise en commun concerne les résultats obtenus pour 6 points (ils sont obtenus par le dénombrement des cordes). Comme dans d'autres situations, cette première recherche permet l'appropriation par les élèves du problème. Toutes les cordes peuvent être tracées et leur nombre (15) peut être vérifié par un dénombrement. La validation des résultats est donc pratique.

Les deux dernières mises en commun (pour 10 et 210) sont analysées dans ce chapitre.

Rappelons rapidement les principales procédures présentées au chapitre 2 (§4.4.1). :

P1- Procédures basées sur le dessin et le dénombrement des cordes ;

[18] J.Douaire, Marie-Laure Elalouf (MCF en sciences du langage), Patrick Pommier (PRAG de SVT). Responsables de la recherche Elisabeth Nonnon et Sylvie Plane.

P2- Procédures basées sur une modélisation additive ;
P3- Procédures basées sur une modélisation multiplicative :
P3.1- réduction du calcul additif ,
P3.2- induire des hypothèses multiplicatives - basées sur le contexte de la situation : chaque point est associé à tous les autres donc de chaque point il « part » n-1 cordes, comme il y a n points, il y a $n(n-1)$ cordes, mais chacune est comptée deux fois.

3.4 Analyse des mises en commun

3.4.1 Etude de la mise en commun pour 10 points

Parmi les productions, une seule est erronée : les élèves ont trouvé 55 cordes, au lieu de 45, et la suite montrera qu'il y avait un désaccord au sein de ce groupe.

La mise en commun a duré 7 mn 45 secondes. Elle comporte donc plusieurs étapes :

1- Etude d'une proposition erronée.
2- Présentation d'une deuxième méthode.
3- Présentation d'une troisième méthode.
4- Comparaison des méthodes.

a) Etude d'une proposition erronée

Les élèves de la classe peuvent constater sur les affiches que seuls les résultats de ce groupe diffèrent de ceux des autres groupes.

Episode 1 : présentation des résultats du groupe

Déroulement	Actions de l'enseignante et des élèves
M J'aimerais savoir, … qu'Aud. vienne au tableau pour expliquer la démarche… Allez Aud. Vous écoutez tous.	*L'enseignante sollicite en premier le seul groupe qui a un résultat faux*
Aud. En fait notre groupe on a tous fait un cercle sur notre cahier, et on a relié tous les points et chacun on a trouvé un résultat par exemple Joh. et Moh. eux ils ont trouvé 55 points en reliant 55 cordes, en les reliant tous, moi j'en ai trouvé 31 et Wal. il en a trouvé 45	L'élève - explique les résultats du groupe - ce qu'avait trouvé chaque élève

La demande porte sur l'explicitation de la démarche par les élèves du groupe, plutôt, par exemple que de solliciter d'autres groupes pour qu'ils formulent leurs remarques sur cette production.

La procédure est précisée. En fait le dénombrement produit 45 ; les contradictions au sein de ce groupe apparaissent

M Bon alors maintenant la démarche, vous avez chacun trouvé des résultats différents explique nous votre démarche puisque vous vous êtes entendus sur un résultat euh un résultat et une démarche parce qu'en fait finalement	*Pour permettre la critique du résultat l'enseignante renvoie à la demande préalable d'explicitation de la démarche.*

vous avez tous écrit vous étiez tous d'accord sur une démarche je vois 10 + 9 + 8 ça correspond à quoi ?	
M Alors Joh. explique vite	*Demande d'explication*
Joh. Bah dans ma tête j'ai relié les points …[comme] sur au tableau au début j'ai trouvé le 10 , après le 9, 8, 7 jusqu'à 1	Explication de la procédure
M Est-ce que tu peux aller au tableau expliquer à tout le monde	*Demande d'explication*
Joh. Dans ma tête j'ai fait un, deux, trois, quatre (il montre les points)	
M Attends retire, on va retirer [des affiches] sinon on ne voit pas, hop et hop, tu parles très fort sinon on ne t'entend pas au fond de la classe	
Joh. Pour trouver le résultat il fallait que je relie comme au début j'ai fait un, deux trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix pour le premier, j'écris 10, après neuf points j'ai fait pareil sauf que [je n'ai pas pris le premier] point comme il est tombé j'ai fait 9 pour le deuxième, tout ce qui remonte ça fait10, 8, 9. Après j'ai calculé le résultat et ça fait 55	Explicitation d'une méthode
M Qu'est-ce que tu as comme calcul	*Demande d'explication*
Joh. J'ai fait 10 +9+8+7+… +6+ 1	
M D'accord	

La procédure, erronée, est explicitée par l'élève. L'enseignante ne formule ni ne sollicite de jugement. Les questions vont provenir directement des élèves.

Ces échanges relèvent de l'explication et non de l'argumentation.

Première critique de la proposition

… A quoi ça sert de faire le dessin alors que l'on peut calculer comme cela	Critique de la méthode, et non du résultat
Joh. Je voulais plus vous expliquer ce que l'on voulait faire	Justification a posteriori, alors que les élèves avaient commencé par faire un dessin
… Si tu fais le dessin tu perds beaucoup temps et en plus c'est dur à compter après avec toutes les cordes	Argument à l'appui de la critique précédente
Joh. C'est plus pour mieux vous expliquer parce que sinon vous allez dire que vous n'avez pas compris…	Reprise de la justification

Dans cet épisode s'instaure un échange argumentatif entre les élèves :

- existence d'un conflit, exprimé ici sur la méthode utilisée, mais qui a probablement pour origine un désaccord sur le résultat, mais l'enseignante avait centré sur la question de la méthode ;
- dialogue où les interlocuteurs restent sur un enchaînement avec la présence d'arguments à l'appui des énoncés ;
- formulation de « modulations » montrant une capacité de négociation : cette première critique prend la forme d'une interrogation, prise en compte de l'interlocuteur.

Les justifications des élèves ne se situent pas dans le même domaine (leur « fondement » est d'ordre différent) : la réponse de Johan ne porte pas sur la procédure mais sur les contraintes de la communication.

La critique de son interlocuteur porte sur le choix de la méthode, et sur son efficacité (« tu perds beaucoup de temps »), sans exclure que cet élève interprète l'erreur - qu'il ne formule pas - comme liée à une erreur de dénombrement.

L'enseignante, qui se place dans la salle de classe au niveau des dernières rangées de tables, n'intervient pas lors de ces échanges.

Demande d'explicitation

… Ça correspond à quoi ton calcul 10+9+8	interrogation: demande d'explication
Joh. Bah les cordes qu'il y avait au début la première c'était 10, 9, jusqu 'à 1	
M Qui est-ce qui pourrait expliquer la méthode de Johan avec d'autres mots	*Demande de reformulation*
… En fait il a tout relié et pour lui les 10 cordes ensuite il a passé à un deuxième point il a tout relié les neuf points après il a passé au suivant etc après 8 , 7 … etc. après il les a tous additionnés.	Explication par un autre élève

L'enseignante se soucie de la compréhension par tous de la méthode exposée.

Deuxième critique de la proposition

M Il y a des élèves qui levaient la main	
Eve. Moi Je trouve que pour 10 il est pas bon parce qu'il a relié le point avec le même point…	2^{e} critique ; justifiée
M Le point avec lui-même c'est ça donc c'est faux. Qui est-ce qui a autre chose à dire ?	*reformulation*
… Moi je voulais dire que s'ils n'avaient pas mis le 10 ils auraient eu bon, parce que là comme il y a dix cordes et comme ça part d'un point il y aura neuf autres, il y aura pas 10 autres comme vous avez dit	Correction de la méthode employée
M Alors c'est quoi comme résultat s'il n'avait pas relié	*Sollicitation*
… 45	
Wal. C'est ce que j'avais trouvé mais ils ne voulaient pas m'écouter…	Justification de Walid
… Ah	
… J'avais mis ça jusqu'à la fin, … ils ont décidé 55	Désaccord dans le groupe

Ces deux critiques de la procédure sont assez complémentaires :

- la première portant sur les limites de la méthode (dénombrement des cordes) supposant éventuellement que l'erreur est due au dénombrement ;
- la seconde explicitant l'erreur et indiquant ce qui aurait pu être fait.

Les interventions de l'enseignante relèvent de la sollicitation, d'aide à la formulation ou de reformulation.

b) Exposé des autres méthodes

Exposé d'une deuxième méthode (Chr., Sar.)

M Bon. Donc le résultat majoritairement vous avez tous trouvé 45, ok et vous avez tous utilisé la même méthode ? alors qu'est-ce qu'il y a d'autre comme autre méthode	*Constat d'un accord sur les résultats et les méthodes employées*

Christophe	Questionnement sur les méthodes
… Nous on a fait comme ça, ça c'est la première corde, la deuxième et ainsi de suite et on s'est dit à la première il y en a 9 car si on additionne cela fait 10 comme il y a dix cordes et après on les a toutes additionné ça fait 45	Explication d'une méthode additive

Exposé d'une troisième méthode (Kar.)

M D'accord… Medhi tu as autre chose à proposer… Non c'est pareil Karen ?	*Sollicitations* *Pas de jugement*
Kar. En fait on a trouvé 90 cordes et comme à chaque fois, il y avait parfois il y a deux cordes on a fait 90 divisé par deux, 45	Explication d'une méthode multiplicative

Ces deux propositions constituent des formulations de deux méthodes. La méthode additive, dans sa formulation, décrit une transformation, le tracé (ou mime l'action de tracer), la méthode multiplicative analyse un état, elle suppose le tracé réalisé (en prenant comme point l'identité des situations pour chacun des points).

Reprise de l'exposé d'une méthode additive et comparaison des méthodes

Med. Il y a 45 cordes… on a commencé à tracer les 45 cordes à partir du premier point… c'est lequel c'est celui-là on va dire, on a commencé à tout tracer, ensuite on a pris le deuxième point, on a commencé à tracer dans vers les autres points et on a trouvé 45	Explication
M Oui et tout ça c'est les mêmes démarches en fait, les mêmes procédures	*Constat d'un accord*
Med. Non parce qu'on a pris au fur et à mesure et quand on arrivait au point par exemple celui là il était déjà fait on faisait avec le quatrième point pas avec le premier	Explication d'une méthode
M C'est les méthodes de Wall., de Joh., partir d'un point et compter le nombre de corde	*Mise en comparaison avec une autre méthode*
Med. Non ce n'est pas la même chose	
… Si c'est la même chose	
Med. Ils ont fait des calculs, 10+9	
… Si c'est la même chose	
Med. Non ce n'est pas la même chose, eux ils ont fait des calculs, ils ont cherché le nombre de cordes qu'on pouvait tracer à partir d'un point. Ils ont cherché le nombre de cordes à partir d'un point, nous on faisait un trait un point un autre trait un point, on revenait au fur et à mesure	Comparaison des deux méthodes : calcul ou dessin puis comptage
M Ah d'accord ok bon et bien maintenant on va essayer, la réponse c'était évidemment 45 cordes vous allez essayer maintenant avec 210 points	*Conclusion*

Explicitation des méthodes.

L'analyse de la seule production erronée, permet de constater que les autres sont correctes. L'enseignante entérine ce constat et propose une nouvelle recherche

3.4.2 Etude de la mise en commun pour 210 points

a) Les productions des groupes

Pour la recherche sur 10 cordes, la seule proposition erronée provenait d'un groupe où il y avait un désaccord : le passage du dénombrement au calcul additif effectué par deux élèves ne prenait pas en compte le fait que s'il y a 10 points le premier est relié au 9 autres et n'est pas relié à lui même.

Pour la recherche sur 210 points les solutions erronées sont principalement des conjectures s'appuyant sur la proportionnalité :

- l'hypothèse que si la donnée est 10 fois plus grande, le résultat va être 10 fois plus grand : « … pour que cela soit plus facile, on a divisé 210 par 10 on a trouvé 21 après de 21 points pour relier à tous les points il y a plein de cordes… il y a 20 points ça nous fait 420 et après… on a divisé par 2 ça nous a fait 210 et comme au début on avait divisé par 10 à la fin on a multiplié par 10, on a trouvé 2100 cordes »
- l'hypothèse précédente, appliquée à d'autres nombres, complétée par une hypothèse sur l'additivité des résultats : » que 10 points ça fait 45 cordes alors on a fait 10 fois 20 parce que cela fait 200 pour arriver à 210, après 200 points égal 900 cordes, 210 points égal 945 cordes, égal 945 cordes sur 210 ».

Les deux autres procédures se réfèrent au contexte géométrique, avec oubli du dédoublement produit par le calcul pour la première (« Alors nous on a commencé on s'est dit que comme dans il y a 210 cordes … alors on s'est dit que dans la première ça va faire 209, ensuite on s'est dit on va faire 210 par 209 … ensuite on a trouvé 43890 »).

Durée de la mise en commun 10 minutes 40 secondes.

b) Présentation d'une solution erronée

L'enseignante choisit de faire présenter en premier les travaux d'un des groupes ayant un résultat erroné. Ce groupe a produit une procédure s'appuyant sur la proportionnalité pour simplifier le calcul additif (1ère affiche) :

210 : 10 = 21
21x20 = 420
420 : 2=210
210x10= 2100

M On se concentre sur le travail qui est mis au tableau, vous regardez les différentes réponses et je propose à… à un groupe peut-être… le groupe de Sop., Sop. tu vas au tableau	*Sollicitation d'un groupe*
Sop. Alors en fait, nous, pour que cela soit plus facile, on a divisé 210 par 10 on a trouvé 21 après de 21 points pour relier à tous les points il y a plein de cordes… il y a 20 points ça nous fait 420 et après comme il y a des cordes qu'on qui … on a divisé par 2 ça nous a fait 210 et comme au début on avait divisé par 10 à la fin on a multiplié par 10, on a trouvé 2100 cordes	Formulation d'une méthode établissant une relation de proportionnalité erronée

Première demande d'explication

M Etes vous d'accord	*Sollicitation*
M Alors on lève la main Sop. tu interroges	*Rappel du fonctionnement des échanges : c'est l'élève qui est*

	au tableau qui donne la parole
… Non je comprends pas vraiment	
… pourquoi tu la comprends pas	
… pourquoi vous faites 21 fois 10 en fait vous… fois 20… enfin moi je comprends pas pourquoi vraiment vous vous faites fois 20…moi je ne comprends pas pourquoi tu l'as mis là …	Demande d'explication
Sop. Parce que il y a 21 points, au lieu de 210 parce que l'on a divisé par 10 et en fait de 21 points on peut aller à 20 points parce que on va pas compter comme il y a 21 points on prend un point …de 20 points… on peut relier jusqu'à 20 points et on ne peut pas jusqu'à 21 En fait j'ai mis 20,	Justification : - on utilise la multiplication plutôt que d'ajouter
… Pourquoi vous n'avez pas compté directement et multiplié par 10	
Sop. Parce que au début pour que cela soit plus facile j'ai divisé par 10 à la fin comme j'avais divisé j'avais multiplié par 10. A la fin je vais multiplier par 10	Justification : simplifier le calcul
Sarah Pourquoi vous divisez par 10 et après vous multipliez par 10…	Nouvelle demande d'explication
Sop. Mais non parce que au début c'est un peu compliqué de faire avec 210 donc on a divisé par 10 pour que cela soit plus facile et après comme on a divisé par 10, on l'a remultiplié …	Justification de la méthode : raison d'efficacité.
… En fait Vous avez juste divisé c'est pour vous aider pour les calculs à faire…[et après vous êtes revenus comme au départ]	Reformulation par un autre élève de la méthode du groupe

La justification de Sop. montre qu'elle recourt à la proportionnalité pour simplifier le calcul, ce groupe n'a pas repris la modélisation multiplicative développée pour 10 précédemment .

Deuxième demande d'explication

Syl Pourquoi vous avez divisé par 2	Demande d'explication
Sop. Parce qu'il y a des cas qui, il y a des points qui sont reliés par deux cordes, alors c'est pour cela que l'on a divisé par deux … Syl. ?	Justification, reprise d'un argument déjà validé dans l'exemple précédent
Syl. Et pourquoi vous n'avez pas multiplié aussi par 2, parce que vous avez divisé par 10 et quand vous avez pas multiplié par 10 et pourquoi vous avez divisé par 2 pourquoi vous n'avez pas multiplié par 2	Seconde demande d'explication
Sop. Non parce que divisé par 2 c'est quelque chose pour avoir le nombre de cordes parce qu'il y a deux cordes par point. Mais là on a divisé par 10 pour que cela soit plus facile et là pour revenir au bon calcul on a multiplié par 10	Reprise de la justification précédente Reprise de l'explication de la méthode

Les remarques portent sur la cohérence de la procédure choisie et sur son adéquation à la situation.

Il n'y a pas de conclusion formulée.

Nous voyons que durant ces deux épisodes l'enseignante n'intervient pas, les échanges étant effectués et régulés par les élèves eux-mêmes.

c) Nouvelle proposition

M Bon êtes vous d'accord avec la démarche, alors qui est-ce qui peut proposer une autre démarche	*Relance*
… Nous maîtresse	
M Syl.	
Syl. Nous on fait 10 points	
M Sylviane Il faut que tu parles très fort et les autres il faut vraiment que vous fassiez du silence absolu pour que vous puissiez entendre	*Conditions de la mise en commun*
Syl. 10 points ça fait 45 cordes alors on a fait 10 fois 20 parce que cela fait 200 pour arriver à 210, après 200 points égal 900 cordes, 210 points égal 945 cordes, égal 945 cordes sur 210	Nouvelle procédure recourant à la proportionnalité
M Alors qu'en pensez vous ? Walid…	*Sollicitation*
M Non non … ce n'est pas les mêmes résultats qu'ailleurs	*Constats sur les différences entre les productions*

L'enseignant relance l'étude d'une nouvelle proposition à partir du constat qu'elle est différente de la précédente.

Demande d'explication

… Comment vous avez fait pour avoir 900 cordes ?	Demande d'explication
Syl. 10 fois 20 ça fait 200 alors 200 on a fait 45 fois 10 et après on a multiplié par deux ça fait 900	Explication
… Je comprends pas pourquoi tu as fait 10 fois 20… arriver à 210 points…	Critique implicite
Sylv. Non pas encore c'est pour cela que l'on a fait 210 points est égal 945 cordes. Christophe ?	Explication
Chr. Après comment vous savez que l'autre… quand on a 10 points ça fait 45… Après vous avez vous avez additionné…	Demande d'explication

Les critiques sont formulées sous forme de questions.

Mise en évidence d'une contradiction avec les autres résultats

V Je trouve que c'est un peu confus 945 pour 210 points, je sais pas c'est un peu confus puisque tout le monde a trouvé à peu près un grand nombre, vous vous avez trouvé 945 il y a plus de points vous avez pris un raccourci mais peut être que le raccourci il est pas…	Nouvelle critique Autre critique : différence avec les autres groupes Tentative d'explication (analogie du raccourci)
M Alors qu'est-ce que tu proposes toi V	*Sollicitation*
V Je ne dis pas que l'autre c'était mieux mais c'est un peu confus et les 210 points j'aurais moi …	Formulation d'un jugement
M D'accord. Alors ton groupe qu'est-ce qu'il propose comme méthode	*Sollicitation*

Critique argumentée s'appuyant sur le constat de la différence de cette proposition avec les autres avec des interrogations ou des réserves sur le « raccourci ».

d) Présentation d'une 3^{e} méthode (Groupe de Wal.)

Walid Alors nous on a commencé on s'est dit que comme dans il y a 210 cordes … alors on s'est dit que dans la	Explication d'une méthode

première ça va faire 209, ensuite on s'est dit on va faire 210 par 209 … ensuite on a trouvé 43890	
M Bon… C'est de ton groupe alors cela ne vaut peut être pas le coup…	*Contrôle de l'efficacité du calcul*
Sylv. Pourquoi 209… plus que 209 cordes	
Wal . On a commencé un petit peu on a commencé un petit peu … Mohamed il avait commencé un petit peu à les faire	Explicitation du travail de groupe (cf. le tracé pour 10)
M Fort Sarah on n'entend pas	*Intervention technique*
Sar. …Multiplication … vous avez pas mis10 en10 La même chose… ça revient au même	
M Allez Walid	*Encouragement*

Critique de la méthode

Wal. Parce que… on a déjà commencé une fois on avait trouvé 209… 209	
… Vous avez oublié de diviser par deux … la méthode	Critique
M Alors donc, oui toi tu dis que leur méthode n'est pas terminée ; ils n'ont pas terminé leur méthode. Alors les autres vous en pensez quoi…	*Reformulation et sollicitation*
M Qu'est-ce qui pourrait ?	
Med. En fait nous on a pris la même méthode que … sauf que nous que la réponse… mais on a oublié de faire on a oublié de faire une division	

Les trois propositions erronées qui avaient été produites ont été explicitées et critiquées, pour la dernière (oubli de la division par deux) très rapidement, ce point ayant déjà été évoqué dans la critique d'une proposition étudiée précédemment. Les autres productions sont correctes.

La mise en commun a largement dépassé le temps prévu pour la séance de mathématiques.

e) Demande de formulation d'une règle

M D'accord. Et qui est-ce qui pourrait en tirer une règle générale? pour n'importe quel nombre ? qu'est-ce que vous pouvez dire ? Med. ?	*Demande de formulation générale*
Med. Je ne sais pas c'est lesquels les bons et la méthode laquelle la méthode la juste, la plus juste	
M Vous n'avez pas une idée de la plus pertinente ? celle qui correspond à ce que l'on avait fait auparavant ? Bri.	*Indication* *Référence au travail sur 10 points*
… Je sais celle en violet [19]	Proposition
M Oui alors qui est-ce qui pourrait en tirer une règle générale ? pourquoi c'est celle d'abord qui est en violet ?	Validation de la réponse Demande de formulation générale
… Parce que les autres… comme les nombres elle est bonne mais comme les nombres ils peuvent pas se multiplier une deuxième fois il faut les diviser par deux	
M D'accord Qui est-ce qui pourrait en tirer une formule générale, une règle générale quels que soit les nombres à partir de la méthode violette ? Med.	Demande de formulation générale

[19] Il s'agit de la 3[e] affiche : « 209 x210 *multiplication posée puis* 43890 : 2 *division posée* ».

Med.	Il faut pas faire de dessins il faut réfléchir par calcul	
M	Tu as une idée d'une méthode générale	*Encouragement*
Med.	Faire une multiplication et une division	
M	D'accord Tu pourrais la généraliser Non	*Encouragement*
M	Très bien	
V	… On avait pas divisé par deux après j'ai divisé par deux ça fait deux nombres et ça m'a fait 21945, vingt et un mille…	Retour sur le résultat
M	Parce que là dans votre multiplication vous prenez quoi ? 210 ça correspond à quoi ?	*Aide à la formulation de la méthode*
…	Le nombre de points	
M	… Le nombre de points qui sont inscrits sur le cercle 209 c'est quoi ?	*Aide à la formulation*
…	La première corde	
M	c'est toutes les cordes qui partent du premier point on fait une multiplication et après qu'est-ce qu'on fait on divise par deux Bon on peut s'arrêter	Formulation définitive
M	Très bien Vous avez bien travaillé, je suis très fière de vous et là vous méritez une bonne récréation	*Conclusion*

Dans ce dernier épisode l'enseignante sollicite les élèves pour effectuer une synthèse portant sur la méthode produite par plusieurs groupes pour trouver le résultat.

3.5 Synthèses sur les échanges

Les propositions produites ayant été étudiées précédemment, l'analyse de ces échanges porte sur les interventions des élèves et celles de l'enseignante, les argumentations développées

3.5.1 Etude des interventions

Sur les 65 interventions des élèves, 23 sont des explications réparties entre les deux mises en commun, 12 sont des interrogations (11 lors de la seconde mise en commun), 3 des propositions, 16 des critiques, et 11 des justifications.

Les interventions des élèves sont de plusieurs types :

- des formulations ou des reformulations de propositions, des explications complémentaires ;
- des justifications des élèves sur leur propre méthode :

  « Non parce qu'on a pris au fur et à mesure et quand on arrivait au point par exemple celui-là il était déjà fait on faisait avec le quatrième point pas avec le premier »
- des questionnements, des demandes d'explicitation adressées directement à l'élève ou au groupe
- des critiques au tableau relatives quelquefois :
  - aux résultats (comparaison avec d'autres),
  - à la procédure (son adéquation, sa cohérence),
- des explications de méthodes proposées par les élèves :
  - « Moi je voulais dire que s'il n'avait pas mis le 10 ils auraient eu bon, parce ce que là comme il y a dix cordes et comme ça part d'un point il y aura neuf autres, il y aura pas 10 autres comme vous avez dit »

- qui peuvent porter sur des désaccords : « Non ce n'est pas la même chose, eux ils ont fait des calculs, ils ont cherché le nombre de cordes qu'on pouvait tracer à partir d'un point. Ils ont cherché le nombre de cordes à partir d'un point, nous on faisait un trait un point un autre trait un point, on revenait au fur et à mesure. »

L'existence de dialogues argumentatifs élaborés :

Elle peut être constatée dans ces échanges par la présence :
- de justifications à l'appui des propositions, des remarques, des critiques ou des questions
- des nouvelles formulations des propositions par des élèves qui ne sont pas d'accord avec celles-ci,
- la formulation de pondérations exprimant l'aspect personnel par son auteur de son énoncé (…), indiquant la prise en compte du point de vue de l'autre, de la relativité de son propre propos « moi je voulais dire ».

Par ailleurs les tours de parole comprennent de fréquents enchaînements de questions, réponses,… directs entre des élèves. Ceux-ci s'adressent à toute la classe, ou à l'élève au tableau. Souvent celui-ci donne la parole à d'autres élèves.

Dans la seconde mise en commun les échanges entre élèves prennent de l'importance et en particulier dans la critique des propositions ou de nombreux enchaînements - question / explication ou critique / justification - sont produits. On peut faire le constat que :
- la prise en charge de la preuve leur est bien dévolue,
- de nombreuses critiques sont formulées par les élèves.

Plusieurs questions ou demandes d'explication formulées par les élèves, contiennent ou amorcent une critique.

Si certaines justifications sont liées au contexte de la mise en commun (« c'est plus pour mieux vous expliquer ») les autres sont d'ordre mathématique.

Les critères de jugement se situent bien dans le champ des mathématiques :

Les questions, remarques, critiques formulées par les élèves portent notamment sur :
- la valeur des résultats et leur comparaison
- l'efficacité de la procédure :
  - « à quoi ça sert de faire le dessin alors que l'on peut calculer comme cela »…
  - « Si tu fais le dessin tu perds beaucoup temps et en plus c'est dur à compter après avec toutes les cordes » ;
- l'adéquation de la procédure : « pourquoi vous avez divisé par 10 ? »
- sur la cohérence de la procédure :
  - « Et pourquoi vous n'avez pas multiplié aussi par 2, parce que vous avez divisé par 10 et quand vous avez pas multiplié par 10 et pourquoi vous avez divisé par 2 pourquoi vous n'avez pas multiplié par 2 ».

3.5.2 Les interventions de l'enseignante

L'enseignante se place dans les derniers rangs, souvent assise à une table.

Rappelons brièvement les différentes catégories d'intervention, qui ont pour but d'en préciser les fonctions :

1) l'organisation du débat, les incitations et la régulation sociale du groupe ;
2) les interventions relatives aux énoncés qui visent leur explicitation ;
3) les interventions techniques sans changement du thème débattu ;
4) les reprises de conclusions partagées, les synthèses après accord ;
5) les réorientations du débat, l'introduction d'une thématique nouvelle ;
6) Les interventions mathématiques portant un jugement, rappelant un savoir non évoqué dans les échanges ou les productions.

D'un point de vue quantitatif sur 40 interventions de l'enseignante, dix se situent dans la phase de conclusion de la deuxième mise en commun. La moitié concernent l'organisation du débat, cinq sont des sollicitations, sept des reprises de résultats ou de propositions déjà formulés, une réoriente le débat vers une conclusion et six concernent les phases de conclusion.

Ses interventions portent sur :

<u>L'organisation des échanges</u>:

- la formulation des tâches (nécessité d'expliciter aussi la démarche…),
- l'envoi au tableau d'un élève,
- des relances pour solliciter des interventions, réguler les échanges, faciliter l'écoute ; l'élève qui est au tableau ne donnant pas toujours la parole aux autres avec efficacité.

<u>Des aides à l'explicitation :</u>

- des encouragements,
- des demandes de reformulation soit à l'élève qui vient de s'exprimer soit à un autre élève,
- des demandes d'explicitation : « Parce que là dans votre multiplication vous prenez quoi ? 210 ça correspond à quoi ? »
- des reformulations.

<u>Des demandes d'avis :</u>

- des demandes sur l'existence d'avis contraire,
- des demandes de prise de position.

<u>Des conclusions exprimant un accord</u>

« Le point avec lui-même c'est ça donc c'est faux ».

Les interventions de l'enseignante ne comportent pas de jugement sur les procédures ou les résultats ; il n'y a pas d'expression de désaccord et peu d'un doute.

Les synthèses effectuées se font après que les points de vue différents sur des propositions contradictoires se sont exprimés et que les élèves ont pu en formuler une critique. L'enseignante formule la conclusion.

<u>**3.5.3 Bilan**</u>

Un premier constat est que cette mise en commun constitue donc un débat argumentatif ; il y a une réelle circulation de la parole, les élèves expriment des critiques ou des questions et leurs interventions ne sont pas limitées à des formulations de leurs méthodes.

Un second constat est que des enchaînements de questions et réponses entre élèves sont fréquents. Les prises de parole ne se limitent pas à une succession de dialogues maître-élève. Ces comportements semblent installés depuis le début de l'année, et correspondent à des choix, ce que confirme un entretien avec l'enseignante : il y a des exigences de socialisation au moyen de débats où la parole de chacun est respectée.

Un troisième constat est que la dévolution de la preuve est bien assurée. Ce sont principalement les élèves qui formulent des critiques, en exprimant des demandes d'explication ou des désaccords. Les arguments utilisés sont des constats, propriétés, des raisonnements, des critères de jugement mathématiques.

Au delà de la possibilité pour des élèves de cycle 3 de développer des preuves et de mener un travail critique sur des propositions, cette expérimentation montre que le travail mathématique de l'élève n'est pas limité par l'organisation didactique choisie.

Les conclusions que la maîtresse formule entérinent un accord, le débat sur une proposition étant arrivé à son terme (le groupe soutenant la proposition erronée n'émet plus d'objection aux critiques ou reconnaît son erreur), sans qu'ils n'apportent précocement la bonne réponse.

Les choix qu'effectue la maîtresse révèlent une gestion assurée de cette phase souvent complexe.

3.6 Eléments d'analyse comparée relativement aux mises en commun dans trois disciplines

Pour se doter d'éléments de comparaison, nous avions choisi d'observer des séquences ordinaires, mises en œuvre par une même enseignante dans trois disciplines différentes. Les phases de mise en commun ont été enregistrées et transcrites. À l'issue des trois séquences, un entretien a réuni le professeur d'école et les trois chercheurs, un entretien ayant déjà eu lieu après la séance de mathématiques. Les analyses qui suivent sont issues de la mise en relation de ces différents éléments.

Nous proposons de rappeler succinctement les fonctions et enjeux des mises en commun observées dans cette classe dans les deux autres disciplines. Nous n'analyserons pas les mises en commun développées dans chacune des deux autres disciplines, qui sont présentées en annexe, nous chercherons simplement à mettre en évidence quelques éléments de comparaison.[20] Ces trois séances n'avaient pas été choisies selon d'autres critères que ceux de pouvoir enregistrer des mises en commun mises en œuvre par la même enseignante dans ces différentes disciplines.

Comme nous en faisons le constat, Marie-Laure Elalouf, Patrick Pommier et moi-même, en conclusion de la comparaison entre les trois disciplines, les prises de parole des élèves, la gestion des interventions n'étaient pas fondamentalement

[20] Nous proposons à l'annexe n° 7 un résumé des analyses effectuées en Maîtrise de la Langue par M.-L. Elalouf et en SVT par P.Pommier, ainsi que des comparaisons que nous avons établies en commun ; ces éléments sont extraits de l'article « Savoirs professionnels et spécificités disciplinaires :analyse de mises en commun en mathématiques, en sciences et en observation réfléchie de la langue au cycle 3 » rédigé par Jacques Douaire, Marie-Laure Elalouf, Patrick Pommier paru en mai 2005 dans la revue « Grand N ».

différentes dans cette classe où l'enseignante avait su installer un haut niveau d'expression, d'écoute, d'autonomie et de collaboration entre les élèves. Par exemple, quand un élève vient au tableau présenter des résultats, commenter des affiches, il donne la parole aux autres, qui lui posent des questions. Il y a une réelle circulation de la parole. Dans le cas où le dispositif le permet, les élèves expriment des critiques ou des questions et leurs interventions ne sont donc pas limitées à des formulations de leurs méthodes. Ces comportements semblent installés depuis le début de l'année, et correspondent à des choix ce que confirme l'entretien : il y a des exigences de socialisation au moyen de débats où la parole de chacun est respectée.

Si ces aspects relatifs à des enjeux sociaux ou d'expression langagière sont partagés, des différences existent dans les mises en commun des trois situations expérimentées ; elles portent sur l'apprentissage visé, où en observation réfléchie de la langue l'apprentissage n'est pas explicite, on ne peut le déduire qu'à l'issue de la dernière synthèse, et où les relations entre les savoirs sont complexes, contrairement aux deux autres disciplines. En sciences la synthèse sur les notions visées n'a pu se faire dans la séance. Mais la dévolution des questions soumises à la recherche ne s'est pas réalisée de la même façon pour les trois disciplines : réelle en mathématique, elle a été difficile en observation réfléchie de la langue, de par le manque d'évidence des objectifs.

Interrogée sur les conditions de réussite des mises en commun, l'enseignante ne cache pas les difficultés rencontrées dans la séance de français ; elle avance plusieurs raisons - manque d'aisance dans la discipline, flou des instructions, manque d'outils testés – mais affirme paradoxalement que ses élèves ont bien travaillé. Si elle appréhende finement les dimensions éducatives des situations de débats (contrat initial, droits et devoirs, nécessité d'expliquer une réponse), les enjeux cognitifs semblent minorés.

Mais le déroulement en mathématiques montre aussi que pour qu'un dispositif didactique laisse toute sa place au travail critique des élèves, cela suppose non seulement un enjeu suffisant et donc un réel écart entre leurs productions, mais cela suppose aussi que le professeur puisse faire l'analyse a priori des procédures attendues. En revanche, si le professeur ne dispose pas d'une grille de lecture des propositions que peuvent faire les élèves, il est plus démuni pour gérer le débat. En fait, la qualité des débats semble, dans ce cas, lié aussi à la prévision que permet le dispositif d'enseignement sur les productions des élèves. En résumé : permettent-ils l'activité réelle des élèves, la production de propositions différentes et l'anticipation des procédures qui sont en jeu ? Les différences repérées tiennent en premier lieu à la clarté des contenus disciplinaires visés dans les situations expérimentées et à l'existence d'enjeux explicites dans les débats.

Les causes de ces différences pourraient être principalement :

- le rapport au savoir, plus complexe sur le sujet abordé en observation réfléchie de la langue que dans les autres disciplines, et par la même par les objectifs de la séance qui étaient moins explicites aux yeux de la collègue en observation réfléchie de la langue,
- la dévolution des questions de recherche rendues possibles ou non par le dispositif didactique choisi, repris d'ERMEL en mathématiques, adapté d'un manuel de sciences où les différentes expérimentations possibles étaient représentées, élaboré par la collègue en français.

Plus que l'impact d'un rapport personnel à la discipline, et à son épistémologie (la nature et les fonctions des preuves), ce sont la clarté des objets et la capacité du dispositif d'enseignement, choisi ou élaboré, à fournir des questions présentant un enjeu de débat pour les élèves et d'une façon plus large à anticiper les productions des élèves qui s'est révélé déterminant pour ces séquences particulières.

4. CONCLUSIONS

La conduite de phases de mises en commun permettant la validation des productions nécessite de garantir l'activité mathématique des élèves.

Nous avons vu, dans l'analyse de la mise en commun de la situation Cordes, qu'il était possible d'assurer cette dévolution dans une classe où, dans de plusieurs disciplines les élèves ont l'habitude de débattre, d'expliciter leurs productions, de poser des questions directement à ceux qui présentent leurs résultats, et de formuler des critiques.

La validité mathématique des critiques s'élabore par un questionnement et des demandes d'explicitation par d'autres élèves des groupes qui ont élaboré des procédures erronées. Des justifications sont apportées à ces critiques.

Dans ces situations complexes, le choix des décisions s'appuie donc sur des formes de débats et une adéquation des choix de l'enseignante aux enjeux de la situation.

Chapitre 6
BILAN ET PERSPECTIVES

1. RETOUR SUR LES QUESTIONS ET LES RESULTATS

Cette étude posait, à l'origine, trois types de questions :

- Est-il possible de développer des preuves qui ne soient pas fondées simplement sur des validations pragmatiques, chez des élèves du Cours Moyen dans le domaine numérique, et, si oui quelles sont elles ?
- Quelles sont les conditions sur les problèmes et les situations qui permettent le développement de ces preuves ?
- Quels sont les choix relatifs à la gestion des phases de mise en commun qui permettent la critique des preuves ?

Pour répondre à ces questions nous avons analysé des problèmes et interprété des résultats expérimentaux constitués par des productions d'élèves et des interactions langagières exprimées lors de mises en commun. Ces problèmes avaient été élaborés et les situations avaient pour la plupart été expérimentées, dans le cadre d'une recherche conduite à l'INRP sur les apprentissages numériques et l'argumentation au cycle 3. Les différentes classes concernées étaient situées dans des écoles en ZEP. Des expérimentations complémentaires centrées sur l'analyse de la gestion des mises en commun par les maîtres ont été conduites ultérieurement.

Dans le premier chapitre, nous avons explicité quels étaient les travaux conduits dans différents domaines scientifiques qui précisaient un cadre dans lequel peuvent être analysés les processus de preuve, c'est à dire les preuves élaborées par les élèves et leur critiques au sein de la classe, ainsi que les situations didactiques permettant leur mise en œuvre.

Une première caractéristique est qu'au moment de la conception de ces situations entre 1994 et 1997 l'argumentation était plutôt étudiée, dans le champ de la didactique des mathématiques, sous l'angle de son articulation considérée comme problématique avec l'enseignement de la démonstration au collège que de son apport aux heuristiques de preuve au niveau du primaire. Nous avions donc été conduit alors, en nous appuyant sur des travaux de didactique des mathématiques, notamment la typologie des preuves définie par Nicolas Balacheff, et ceux sur les conditions sur les situations et les phases de validation, à expliciter les apports théoriques qui pouvaient concerner l'étude des processus de preuve au primaire. Mais aussi, pour pouvoir analyser les compétences argumentatives des élèves, nous avions fait référence aux principales théories contemporaines sur l'argumentation et à des travaux de psychologie.

Cette analyse nous conduisait à postuler la possibilité d'une argumentation mathématique dans des processus de preuve au niveau du Cours Moyen.

Aussi dans ce premier chapitre, nous avons mis en perspective ces cadres théoriques en fonction d'une part des travaux ultérieurs menés en didactique des mathématiques qui ont abouti à la reconnaissance d'une argumentation en mathématiques et d'autre part de la diffusion accrue des théories refondatrices de l'argumentation dans l'enseignement.

Dans le deuxième chapitre, nous avons approfondi l'analyse des problèmes de preuve, considérés sous un double éclairage. En effet nous ne les avons pas étudiés simplement comme des prolongements de phases de validation des problèmes de recherche à partir desquels ils étaient élaborés (une solution ayant été produite dans le problème de recherche, l'enjeu du problème de preuve peut être d'établir son unicité, ou l'ensemble des solutions, ou l'impossibilité d'une solution pour d'autres valeurs des données, ou l'optimalité d'une solution…). Mais, d'une part, nous avons explicité, pour chacun des problèmes, les procédures de preuve et leur articulation avec les procédures de résolution qui constituaient, ainsi que les résultats produits dans les premières recherches, des composantes du milieu adidactique des situations de preuve. D'autre part nous avons mis en évidence, par delà la spécificité de chacun des problèmes, les éléments communs à ces preuves.

Nous sommes donc passés, au moyen de cette analyse, d'une justification de la possibilité de développer un travail de preuve sur des problèmes numériques particuliers, s'appuyant sur les processus propres à chaque situation, à la mise en évidence d'un champ potentiel de problèmes arithmétiques, champ qui sollicite des processus de preuve semblables, susceptibles de contribuer à une rationalité.

Dans le même chapitre, nous avons explicité les éléments communs aux organisations didactiques nécessaires à l'élaboration de ces preuves.

Dans le troisième chapitre, nous avons analysé des productions produites dans huit classes, en nous centrant plus particulièrement sur trois d'entre elles et sur huit des dix-sept expérimentations de situations menées dans ce champ de problèmes.

Nous avons mis en évidence la diversité des preuves produites, qui relèvent de deux grands types selon les problèmes : d'une part la production exhaustive des résultats numériques permettant soit d'établir l'ensemble des solutions soit, par encadrement, de prouver l'impossibilité d'une solution pour certaines valeurs des données, et d'autre part, le recours à des raisonnements à partir de propriétés connues pour établir des propositions générales ou le recours à des contre-exemples pour infirmer d'autres propositions.

Pour pouvoir mettre à l'épreuve l'existence du champ de problèmes de preuve évoqué précédemment, nous avons aussi distingué trois éléments constitutifs des processus de preuve : des propositions élaborées pour répondre à certains de ces problèmes, des procédures arithmétiques et des justifications fondées sur des arguments, valides ou non. Nous avons ensuite construit une typologie des justifications produites dans ces problèmes, en explicitant leur statut, mais aussi une classification commune des procédures de preuve, d'une part, et des propositions produites, d'autre part. Ces typologies étant ensuite validées par la reprise et l'insertion des preuves spécifiques à chacun des problèmes décrites antérieurement, dans cette nouvelle classification.

Nous avons alors appliqué cette nouvelle typologie aux productions élaborées par les mêmes élèves durant deux années, lors de la résolution de deux problèmes de preuve au CM1 et de deux autres au CM2. Nous avons pu constater le caractère de preuves des justifications produites. En particulier, si les formulations expriment souvent des conditions nécessaires mais non suffisantes, ce qui est lié aussi au degré de généralisation posé par certains problèmes entraînant le traitement spécifique de sous-problèmes de preuve, nous avons pu constater l'absence de recours à des arguments provenant de champs extra-mathématiques. Par ailleurs nous avons aussi constaté, que dans ce milieu social très défavorisé, l'accès à la formulation de preuves ou de critiques est encore plus difficile dans les phases collectives, pour les élèves les plus faibles, qui toutefois développent des procédures de preuves.

Par ailleurs, dans ce même chapitre, nous explicitons les limites de certains problèmes de preuve, en particulier lorsque la proposition qu'il s'agit de prouver se heurte à des évidences non probantes, ou des difficultés dans l'organisation de la situation de preuve.

Le quatrième chapitre est plus particulièrement centré sur le processus d'élaboration de l'ingénierie proposée. Il consiste donc en une comparaison inédite, pour les expérimentations concernées, entre deux organisations didactiques, l'une au début de l'expérimentation en 1994, lorsque les compétences mêmes des élèves du Cours Moyen dans le domaine de la preuve et de l'argumentation en mathématiques, demeuraient en partie inconnues pour nous, en premier lieu parce que ce sont les situations expérimentées à partir de cette année-là qui nous ont permis de les préciser. L'autre expérimentation a été conduite deux ans après, avec une organisation didactique où la répartition des tâches entre les élèves et le maître avait été explicitée et avait fait l'objet d'autres choix ; ceux-ci, dans ces conditions expérimentales, étaient décidés ensemble avec l'enseignante. La situation expérimentée est un problème de recherche d'une solution optimale dont la résolution suppose le traitement de propositions successives nécessitant d'assurer la dévolution aux élèves de la critique des propositions, tout en garantissant la validité des raisonnements et la complétude de preuves.

En dehors des difficultés propres repérées dans le traitement de certaines propositions, la question posée dans ce chapitre est celle de l'émergence des conditions permettant une robustesse des situations, qui est liée, en premier à la capacité de proposer un réel enjeu de preuve et de présenter les procédures attendues, mais aussi d'expliciter des choix possibles dans les prises de décision. Une composante complémentaire de ces choix est que, compte tenu de la polyvalence des enseignants de l'école primaire, non spécialistes des mathématiques dans leur immense majorité, auxquels sont destinées ces propositions, ces choix doivent pouvoir décrire des organisations didactiques et des interventions du maître présentant une certaine permanence entre les situations tout en préservant l'activité mathématique réelle des élèves.

C'est cette question des choix mathématiques de l'enseignant et de leur effet sur l'activité mathématique réelle des élèves, dans des conditions ordinaires, que nous avons abordée dans le cinquième chapitre. Dans ce but, nous avons analysé les mises en commun liées à différentes phases d'une situation de dénombrement où les élèves avaient à prouver la validité de leurs solutions. Cette analyse nous a montré que, dans ce cas précis, ce qui garantit la qualité du travail de critique des élèves est lié à la confiance dans la fiabilité du dispositif, mais aussi à des ambitions et des choix pédagogiques transcendant les particularités disciplinaires, assurant aux élèves la possibilité de formuler et de critiquer leurs productions. L'éclairage complémentaire de l'analyse de mises en commun gérées par la même enseignante dans deux autres disciplines confirme l'importance de l'enjeu de preuve pour les élèves et celle de la cohérence scientifique de la séquence. Cette analyse nous conduit à nous interroger sur les processus d'acquisition de ces compétences professionnelles en formation, avec leurs spécificités disciplinaires à un moment où l'importance des pratiques langagières dans la construction des connaissances est valorisée dans les programmes et constitue aussi un objet de recherche dans la formation.

2. APPORTS COMPLEMENTAIRES SUR LES PROCESSUS DE PREUVE

L'analyse des productions et des échanges effectuée dans les chapitres 3 à 5 a permis de préciser certaines des compétences et des difficultés des élèves portant sur les preuves produites, les raisonnements élaborés et les éléments de rationalité auxquels ils accèdent.

Deux types de preuve

Le premier constat est que dans l'ensemble des problèmes proposés, les élèves peuvent développer des processus de preuve. De plus ces processus peuvent être regroupés en deux grands types.

D'une part des productions et des réorganisations d'essais pour permettre des encadrements (*Les trois nombres qui se suivent* et *Somme et Différence* pour les problèmes d'impossibilité qui constituent le deuxième problème de chacune de ces situations), ou une recherche de toutes les solutions (*Golf)*. Ces réorganisations supposent en général de fixer une des variables et de faire parcourir à l'autre un ensemble de valeurs. Dans ces cas, la réduction de l'ensemble des solutions peut être déterminée directement à partir d'un raisonnement sur des valeurs numériques particulières. Il s'agit donc d'une définition du champ des possibles justifiée par un raisonnement garantissant l'exhaustivité.

D'autre part, des productions de justifications visant à établir la vérité d'une proposition. Ces justifications peuvent s'appuyer sur des propriétés connues (rôle du 1 dans *Le plus grand produit),* ou implicitement connues sans être directement formulables dans les termes du problèmes (recherche des nombres qui sont la somme de trois nombres qui se suivent dans le troisième problème de cette situation) ou des propositions spécifiquement élaborées (comparaison de produits de 2 ou de 3 dans *Le plus grand produit*, parité de la somme et de la différence de deux nombres dans *Somme* et *Différence*).

Nous avons aussi constaté que l'existence de procédures expertes (prendre la moitié de la somme et de la différence dans *Somme et différence*, recourir à la division dans *Les trois nombres qui se suivent),* déplace l'objet de la validation vers la justification du modèle et non plus la production d'un raisonnement. Aussi il peut être important de s'assurer que le modèle expert n'est pas encore acquis si c'est la production de raisonnements et de preuves que l'on vise.

Rappel sur les niveaux de preuve et les argumentations

Nous avons pu constater que si les élèves produisent des preuves relevant de l'empirisme naïf, par exemple Hassen dans la classe n°7 pour *Somme et différence,* qui conclut après quelques cas, ou de l'expérience cruciale, par exemple le groupe de Salim et Tesnim qui, dans l' étude des deux propositions dans *Le plus grand produit* prend un nombre pour les comparer, donc pour trancher entre deux points de vue - il s'agit plutôt dans ce cas de la difficulté à élaborer un jugement selon des critères partagés, les élèves produisant plutôt une nouvelle proposition - les élèves accèdent à la production d'exemples génériques pour décrire des opérations sur des valeurs particulières, mais qui illustrent une généralisation, qui ne peut s'exprimer par d'autres formes langagières ou symboliques.

Ces expressions correspondent bien à des argumentations et non à des explications. Par ailleurs il y a très souvent production de critique, sous réserve que la dévolution du débat ait été assurée. Les élèves sont aussi capables de produire un dialogue argumentatif « élaboré » (cf. Golder C. 1992 et 1996).

Nous avons vu aussi que dans plus d'un cas, le rôle des débats avait été de conduire à des exigences de précision. Le contre-exemple est utilisé et son rôle est mis en évidence.

3. ELEMENTS DE SYNTHESE SUR LES PROBLÈMES ET LES SITUATIONS

Si les connaissances sollicitées sont différentes suivant le problème de preuve étudié, les procédures expertes diffèrent aussi pour la résolution du problème initial. Les contrats didactiques et l'organisation des milieux adidactiques, génèrent, dans les phases de résolution, la production d'essais et leur comparaison avec le but à atteindre. En termes de tâches, trois tâches sont dévolues à l'élève : élaborer une procédure, contrôler sa solution, formuler ses résultats et sa méthode.

Une des caractéristiques des preuves produites est qu'elles répondent à un problème dont l'enjeu est perçu par les élèves, ce qui, comme nous l'avons exprimé dans le chapitre 3 et constaté dans l'analyse des résultats, est dû à ce que la dévolution du problème, la représentation du but à atteindre se sont constituées dans la première phase, ce qui rend possible un contrat didactique compatible avec cette situation de preuve. La validation lors de la première phase consiste dans la vérification des contraintes de l'énoncé. Mais on peut distinguer dans les premières phases, des problèmes :

- où la vérification des contraintes suffit à contrôler :
  - la solution qui est unique (*Trois nombres qui se suivent* premier problème, *Somme et différence* premier problème) et aussi *Tirelire ;*
  - ou les solutions, si plusieurs solutions existent (*Golf*) ;
- où le contrôle peut s'effectuer par une procédure plus élémentaire (*Cordes*) (existence d'un milieu matériel) ce qui n'exclut pas le recours à un raisonnement.
- où il n'y a pas de validation dans la première phase de recherche pour quelques valeurs (*Le plus grand produit*), mais simplement le constat qu'aucun élève n'a de meilleure solution, la procédure de validation constituant l'objet même de la seconde phase : l'étude du problème dans le cas général. Nous avons vu que pour ce problème, une validation dans la première phase supposerait d'explorer l'ensemble des possibles, ce qui serait, vu leur nombre, même pour les valeurs numériques choisies, impossible à gérer par les élèves. De plus la production exhaustive de toutes les solutions constituerait un obstacle pour la production de propositions pour la résolution du problème général.

Quelles relations entre les processus de preuve et les procédures de résolution ?

L'analyse préalable a décrit :

- le passage des problèmes de recherche aux problèmes de preuve,
- l'appui sur les procédures de résolution dans les problèmes de recherche pour la mise en place des processus de preuve.

Sur ce dernier point, les procédures de résolution dans les problèmes de recherche constituent une des composante du milieu adidactique des problèmes de preuve. Par exemple dans les problèmes de recherche de tous les possibles (type *Golf*) les procédures de résolution changent de statut. Elles sont d'abord des outils, non toujours explicités, dans la résolution du problème dans la première phase de la situation ; ces outils sont susceptibles d'être identifiés et formulés seulement dans le cadre de la mise en commun qui suit la recherche dans cette première phase, portant sur le respect des contraintes et la fiabilité des procédures, pour être comparés ou critiqués dans cette même phase. Puis ces procédures deviennent des outils efficaces pour produire de nouveaux essais une fois que leurs caractéristiques ont été identifiées (production de nouveaux couples de nombres) et ensuite des objets d'étude. Le critère de jugement change de nature : d'efficacité de l'essai de calculs multiplicatifs (une procédure utilisant peu d'essais sera valorisée par rapport à une procédure calculant toutes les valeurs possibles), il devient nécessaire pour s'assurer que tous les essais ont été produits, avec un contrôle sur la variation.

Les problèmes de preuves vont donc conduire à transformer les procédures par essais en procédures organisées, permettant ainsi de mieux comprendre les relations entre les nombres et les améliorations de la gestion d'essais.

Les problèmes de preuve vont aussi, de part leur procédures voisines, donner une homogénéité aux problèmes de recherche, qui non seulement vont permettre de développer des procédures communes (gérer des essais, émettre des hypothèses), mais vont aussi utiliser des processus de preuve semblables.

4. SPÉCIFICITÉ DE CES PROBLÈMES POUR L'ELABORATION DE PREUVES

Dans l'enseignement des mathématiques au primaire, et en particulier dans les situations d'apprentissage élaborées par notre équipe de recherche ERMEL pour le Cours Moyen, tant dans les apprentissages numériques que géométriques, des questions de preuve sont proposées qui ne concernent pas seulement les problèmes de preuve analysés dans cette étude.

Une question qui se pose est celle de la nécessité, voire de la prédominance dans l'accès des élèves à une rationalité mathématique, de situations qui ne visent que ces apprentissages sans, en même temps chercher à développer l'acquisition de notions ou de techniques nouvelles. La question n'est pas spécifique à l'apprentissage de la preuve, elle se pose aussi pour le développement de compétences permettant aux élèves de résoudre des problèmes. Pour ces deux objectifs : apprendre à chercher et apprendre à prouver, le constat est souvent fait que seuls ces problèmes de recherche sont utilisés pour développer ces compétences et non des situations visant un apprentissage notionnel. Trois explications peuvent éclairer ce choix.

Tout d'abord, il est nécessaire que le contrat soit bien celui évoqué précédemment permettant la résolution de problèmes. Si le problème abordé peut être résolu par une méthode experte connue de certains, les autres élèves risquent de se désinvestir de situations où leurs procédures ne pourront être valorisées. Il risque de se créer un nouveau contrat pour ces phases de recherche : celui de l'identification du modèle. Dans les problèmes contribuant à une amélioration des procédures, les critères d'efficacité ou de fiabilité ne sont pas du même ordre que ceux relevant de la rationalité.

De plus la présence de connaissances en cours d'acquisition parmi celles qui sont pertinentes pour la résolution, modifie l'équilibre entre les connaissances et les raisonnements. Les connaissances ne peuvent être des outils de preuve que si elles ont une relative solidité. Nous avons vu les difficultés des élèves à raisonner sur les multiples de 3 au début du CM1, dans ces milieux sociaux défavorisés.

Une troisième raison plus pragmatique relève de ce qui peut être institutionnalisé par l'enseignant : les autres situations sont conçues pour des objectifs notionnels ou d'apprentissage de techniques expertes qui apparaissent comme prioritaires dans la phase d'institutionnalisation. Si une analyse a priori peut permettre d'expliciter les questions présentant des enjeux de preuve et des conditions suffisantes pour pouvoir garantir un travail de preuve dans telle ou telle situation d'apprentissage, l'institutionnalisation des connaissances rend souvent contradictoires des conclusions sur des procédures de recherche ou de preuve et sur les notions visées. Un apprentissage de processus de preuve suppose de disposer d'un ensemble de situations où cet enjeu est effectif.

5. QUELLES PERSPECTIVES DE RECHERCHE ?

Trois questions pourraient faire l'objet de recherches complémentaires.

La première question porterait sur la continuité des processus de preuve développés au primaire et au collège.

Cette question s'était posée dans le cadre de la recherche « Argumentation et démonstration dans les débats et discussions en classe» (cf. Douaire et al. 2004) qui proposait d'analyser des situations de débats pour voir quelles modifications l'introduction d'un travail argumentatif entraîne dans les régimes de vérité propres à chaque discipline. Cette recherche portait à la fois sur des questions de preuve propres à chaque discipline et d'autre part sur des comparaisons entre les disciplines.

Plus spécifiquement, en mathématiques, nous cherchions à repérer, au début du collège, avant l'apprentissage de la démonstration, comment co-existent les différents types de validation que nous avions analysés au Cours Moyen, validation pratique, recours à la mesure ou à une vérification des contraintes de l'énoncé, et plus particulièrement, les preuves mises en évidence dans cette étude constituées par la production de raisonnements s'appuyant sur des propriétés.

Mais nous voulions aussi comparer les argumentations produites par les élèves dans les différentes disciplines, et leur contribution à la construction des connaissances dans chacune d'entre elles.

Nous avons notamment analysé plusieurs débats menés dans cinq disciplines (français, mathématiques, physique, SVT, histoire - géographie) dans une même classe dans 5è.. Le niveau de la 5e avait été choisi de façon à permettre l'étude dans le domaine de la physique et à ne pas interférer avec les enjeux spécifiques de l'apprentissage de la démonstration en 4e. Nous avions choisi le collège Edouard Vaillant de Gennevilliers situé en ZEP, où allaient les élèves de l'école Anatole France (classes n° 1, 2, 3, 4, 7 et 8) de notre étude. L'expérimentation dans ce collège a porté sur une vingtaine de débats argumentatifs menés, dans l'ensemble de ces disciplines, en 2001/2002[21].

Les résultats obtenus lors de la comparaison des argumentations montrent que les élèves de 5e peuvent développer des discours argumentatifs compatibles avec la discipline, sans confusion entre les différents champs disciplinaires, et qu'ils sont capables de mener des échanges longs et critiques.

Dans cette classe, les élèves étaient capables de repérer les contradictions ou incohérences dans des discours d'autres élèves, mais les connaissances mobilisées étaient simplement constituées par celles « réactivées » par la situation. Une difficulté à laquelle ils se heurtaient résidait dans ce qu'ils n'osaient pas produire de nouveaux essais qui leur auraient permis de formuler des hypothèses. Les critères de jugement des propositions montraient que les élèves ne distinguaient pas la façon d'établir la validité d'une proposition mathématique, de celle de comparer des méthodes selon des critères variés (rapidité, économie, fiabilité).

Il me paraîtrait utile de regarder plus finement, cette évolution des processus de preuves et de la conception associée de l'établissement de la vérité en mathématiques, à ces niveaux de fin de l'école primaire et du début du collège, au moyen de débats argumentatifs. Cette étude pourrait prendre plus largement en compte les interactions produites au sein de petits groupes d'élèves, lors de la formulation de conjectures, ou de la production de preuve. Toutefois la question se pose de l'articulation entre cette problématique et celle de la conception de la démonstration, de son apprentissage et de l'articulation avec des argumentations mathématiques (sur ce point voir Pedemonte 2002 et 2005).

Une seconde question de recherche porte sur l'analyse des conditions, relatives aux dispositifs de formation, permettant la maîtrise des compétences professionnelles en jeu dans les mises en commun.

Nous avons vu au chapitre 5 que, si la mise en œuvre de situations de preuve est possible par des enseignants ayant quelques années d'exercice, elle suppose des choix permettant la dévolution aux élèves de la production de preuves et de la formulation de critiques. Ces choix peuvent être effectués en fonction de critères non spécifiques aux mathématiques, les aspects sociaux ou langagiers des débats étant valorisés. Mais nous avons vu aussi dans la brève comparaison entre les disciplines, suivant l'analyse de la mise en commun de *Cordes*, l'importance de l'existence d'un problème présentant un réel enjeu pour les élèves ainsi que de la possibilité pour le maître d'anticiper, au moyen du dispositif d'enseignement utilisé les procédures et résultats que produiront les élèves. Nous avions rappelé aussi un résultat d'une recherche précédente sur la gestion des mises en commun : les jeunes enseignants s'étaient installés, en ce qui concerne les mises en commun, dans une coutume pédagogique, qui, selon les classes, laissait plus ou moins d'activités mathématiques aux élèves.

L'analyse des difficultés rencontrées par les enseignants du primaire, en général non spécialistes des mathématiques, dans la mise en œuvre de mises en commun, constitue donc un objet de recherche pouvant être pris en compte aussi dans d'autres disciplines. Dans le cadre de la recherche « Pratiques langagières et construction de savoirs » plusieurs niveaux de questions avaient été distingués. Pour notre part, sur

[21] La dernière cohorte d'élèves de notre étude, qui était en CM2 en 96/97, avait dépassé la classe de 5e.

cet objet de la conduite des mises en commun par des enseignants débutants nous avions tenté :

1) Une explicitation théorique de l'objet de formation examiné dans les divers champs disciplinaires, par l'analyse des fonctions des mises en commun et des tâches du professeur, en mathématiques et dans les autres disciplines.

2) Un bilan des résultats empiriques permettant de légitimer la proposition de cet objet de travail à des enseignants en formation, et une appréhension de ce que peuvent être les cultures professionnelles, chez des enseignants des différentes disciplines, sur ces questions.

3) Un repérage d'éléments de compétence professionnelle et des difficultés que rencontrent les maîtres dans la gestion des échanges verbaux dans des démarches de construction de connaissances, à partir de l'analyse des pratiques réelles d'enseignants expérimentés et d'enseignants débutants.

Si nous pensons avoir apporté des éléments de réponse sur ces trois points nous n'avons, que de façon réduite, pu analyser des pratiques de formation. Nous avons plutôt fait le choix d'évaluer des actions de formation que nous avons pu entreprendre sur ce sujet et de conduire une réflexion dans le cadre de la formation de formateurs. Cette analyse des formations sur ce point spécifique des mises en commun, et dans le cadre d'une comparaison entre disciplines, et de leurs des effets sur la pratique des enseignants débutants constituerait donc un deuxième objet de recherche.

Une troisième question de recherche, qui n'est pas sans rapport avec la première, consisterait à prolonger ce qui a été fait ici pour le choix des problèmes et à élaborer une structuration du champ de problèmes arithmétiques susceptibles de permettre le développement des processus de preuve.

Bibliographie

Arsac G, (1988), L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique » *Recherches en Didactique des mathématiques,* Vol 8 n° 3 pp.267-312

Arsac G. (1989) Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol.9 n°3

Arsac et al. (1992), Initiation au raisonnement déductif au collège. IREM de Lyon – Presses Universitaires de Lyon

Arsac G. et Mante M. (1997) Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Fducational Studies in Mathematics.Vol* 33, n°1. pp Kluwer Academic Publishers.

Artigue M. (1990) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol.9 n°3 1988 pp 281-307

Balacheff N. (1987) Processus de preuve et situations de validation *Educational Studies in Mathematics* Vol n°18 p147-176. Kluwer Academic Publishers.

Balacheff N (1988) Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves du Collège . Thèse d'état, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Balacheff N. (1999) L'argumentation est-elle un obstacle ? La lettre de la preuve www.lettredelapreuv.it

Balacheff N., Margolinas C. (2005) Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques in *Balises pour la didactique des mathématiques,* (Mercier A ; , Margolinas C. ed.) La Pensée Sauvage. pp 75-106

Barbin E. (1993), Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration pour quels apprentissages ? *Repères- IREM* n° 12 pp 93-113.

Boero P. (1999) Argumentation et démonstration : Une relation complexe, productive et inévitable en mathématique et dans l'enseignement des mathématiques in La lettre de la preuve www.lettredelapreuv.it n° 1999 07088

Bosch M., Gascon J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques in *Balises pour la didactique des mathématiques*, (Mercier A ; , Margolinas C. ed.) La Pensée Sauvage. pp 107-122

Borel M.-J., Apothéloz D. Péquegnat C (1984) Discours et raisonnement, in Sémiologie du raisonnement (Peter Lang, Berne)

Bouvier Alban (1995) *L'argumentation philosophique - étude de sociologie cognitive* PUF

Breton P.,Gauthier G. (2000) *Histoire des théories de l'argumentation*, La Découverte.

Brousseau G. (1990) Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol.9 n°3 1988 pp 309-336

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 7n°2

Brousseau G. (2004) Introduction à l'étude de l'enseignement du raisonnement et de la preuve : Les paradoxes La lettre de la preuve www.lettredelapreuv.it n° 1999 07088

Caveing M. (1997) « La figure et le nombre : recherches sur les premières mathématiques des Grecs ». Presses Universitaires du Septentrion, Villeneuve-d'Ascq.

Champaud C. (1994) L'argumentation, in Raisonnements : conjonctures et prospectives, *Psychologie Française* Vol 39 n°2 pp 193-203, Dunod

Da Silva Neves R.M. (1994) : Théories de la psychologie de l'induction, in Raisonnements : conjonctures et prospectives, *Psychologie Française* Vol 39 n°2 pp 123-140, Dunod.

Da Silva Neves R.M. (2002) L'induction in Politzer. *Le raisonnement humain. Traité des sciences cognitives.* Hermès. Lavoisier.

Douaire J. Hubert C. (2002) Mises en commun et argumentation en mathématiques Grand N n°68

Douaire J., Argaud H.-C..,Dussuc M.-P, Hubert C, (2003) Gestion des mises en commun par des maîtres débutants » in «Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes, (coordination Colomb J., Douaire J., Noirfalise R. ADIREM/INRP).

Douaire J. (coordonné par.) (2004) Argumentation et disciplines scolaires, INRP,

Douaire J . Elalouf M.-L. Pommier P. (2005) Savoirs professionnels et spécificités disciplinaires : analyse de mises en commun en mathématiques, en sciences et en observation réfléchie de la langue au cycle 3, Grand N n° 75, pp 45-57

Doury M. et Moirand S. (coord.2004) L'argumentation aujourd'hui : Positions théoriques en confrontation (Presses Sorbonne Nouvelle)

Duval R. (1990) Pour une approche cognitive de l'argumentation Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives Vol n°3-1990, pp195-221

Duval R. (1991) "Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration" - *Fducational Studies in Mathematics.*Vol 22 pp233-261 Kluwer Academic Publishers.

Duval R. (1992-1993) «Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? » *Petit x n°31*, pp 37-61, IREM Grenoble

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

Duval R . (1999) L'argumentation en question, in La lettre de la preuve www.lettredelapreuv.it n° 1999 1112

Duval R. (2001) Ecriture et compréhension : Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? in *Produire et lire des textes de démonstration* (coord. Par Barbin E., Duval R.,Giorgutti I. Houdebine J., Laborde C.). Ellipses

Duval R., Egret M.A. (1989) L'organisation déductive du discours, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* Vol 2 pp 41-63

Duval R., Egret M.A. (1993) Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif *Repère- IREM* n°12 pp114-140

ERMEL (1995) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CE2*, Hatier.

ERMEL (1997) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM1*, Hatier

ERMEL (1999 a) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM2*, Hatier.

ERMEL (1999 b) *Vrai ? Faux ? … On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3* (Douaire J. Hubert C. coord. INRP).

ERMEL (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3* Hatier.

Ganascia J.G. (1989) Logique et induction CEPADUES

Georges C. (1997) Polymorphisme du raisonnement humain. PUF

Gil F. (1988) Preuves, Aubier

Gibel P. (2004) Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique en classe de mathématiques à l'école primaire, Thèse, Université de Bordeaux 2.

Golder C. (1992), Argumenter : de la justification à la négociation, *Archives de Psychologie, Genève*, Ed. Médecine et Hygiène, , Vol. 60, n° 232 pp 3-24

Golder C. (1996) Le développement des discours argumentatifs, Delachaux et Niestlé

Golder C., Pouit D., (1999), Il ne suffit pas d'argumenter pour avoir raison- Les difficultés du discours argumentatif : point de vue de psycholinguiste in *Vrai ? Faux ? … On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3* (Douaire J. Hubert C. coord. INRP)

Grize J.-B. (1990) *Logique et langage*, Ophrys.

Grize J.-B. (1982) *De la logique à l'argumentation*, Droz.

Grize J.-B., Pierault-Le Bonniec G. (1989) La contradiction, PUF

Guichard J. (1989) Arrière-plans philosophiques de la démonstration. Actes du 7 ème colloque Inter-IREM Histoire et épistémologie des mathématiques (1989) : La démonstration mathématique dans l'histoire. IREM de Besançon et IREM de Lyon

Isidore-Prigent J., Plane S., Rrebière M. Le discours argumentatif envisagé comme produit langagier in Argumentation et disciplines scolaires (Douaire J. coord.) INRP pp 23-39.

Krummbeuer G. (1995) The ethnography of argumentation, in The emergence of mathematics meanning : interaction in classroom cultures, Bauersfeld, H. & Cobb, P. (eds). Hiisdale ,NJ : Lawrence Erlbaum.

Margolinas C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux en classe de mathématiques*, La Pensée Sauvage

Mariotti M.-A. (2001) La preuve en mathématiques La lettre de la preuve www.lettredelapreuv.it

MEN (1995) Programmes de l'école primaire, CNDP- Savoir Livre.

MEN (2002) Document d'application des programmes - Mathématiques cycle des approfondissements (CNDP)

MEN (2004.) Programme du collège. Mathématiques. Introduction générale pour le collège B.O. Hors série n° 5 du 9 septembre

Noirfalise R. (1993) Contribution à l'étude didactique de la démonstration. *Recherches en Didactique des mathématiques,* Vol 13 n° 3 pp. 229-256

Pedemonte B. (2002) Etude didactique et cognitive des rapports entre l'argumentation et la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques, Thèse Université Joseph Fourier (Grenoble I) et Université de Gênes.

Pedemonte B. (2005) Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration *Recherches en Didactique des mathématiques,*Vol. 25, n°3, pp 313-348.

Perelman C. et Olbrechts-Tyteca L. (1958,1988) *Traité de l'argumentation* (Ed. Université de Bruxelles)

Perrin-Glorian M-J. (1994) Théorie des situations didactiques : naissance développement, perspectives in Vingt ans de didactique des mathématiques en France Hommage à Guy Brousseau et à Gérard Vergnaud (eds ; Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P.) La pensée sauvage pp 97-144

Perrin-Glorian M-J. (1999) Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol19 n°3, pp 279-321

Perrin-Glorian M-J et Hersant M. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 23, n° 2 pp

Piajet J. (1924, 1993) *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé,

Piajet J. et Garcie R. (1987) *Vers une logique des significations* ed. Murionde Genève

Plantin C. (1990) *Essais sur l 'argumentation*. Kimé

Plantin C. (2004) Situation des études d'argumentation : de déligitimations en réinventions, in L'argumentation aujourd'hui : Positions théoriques en confrontation (Doury M. et Moirand S. coord.)Presses Sorbonne Nouvelle

Plantin C. (2005) *L'argumentation*. PUF

Politzer G. (dir) (2002). *Le raisonnement humain. Traité des sciences cognitives.* Hermès. Lavoisier

Richard J.-F. (1994) La résolution de problèmes : bilan et perspectives, in Théories de la psychologie de l'induction, in Raisonnements : conjonctures et prospectives, *Psychologie Française* Vol 39 n°2 pp 161-175.

Richard J.F. (2004) *Les activités mentales.* Armand Colin

Robert A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant *Recherches en Didactique des mathématiques* Vol 21 n°1-2 p 57-79

Robert A. Rogalski J. (2002) Le système concret et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche *La revue canadienne de l'enseignement des sciences mathématiques et des technologies.*

Rouche N. (1989) : Prouver : Amener à l'évidence ou contrôler les implications. Actes du 7 ème colloque Inter-IREM Histoire et épistémologie des mathématiques : La démonstration mathématique dans l'histoire. IREM de Besançon et IREM de Lyon.

Toulmin S.E. (1958, 1993) *Les usages de l'argumentation* PUF

Vergnaud G (1991) La théorie des champs conceptuels *Recherches en Didactique des mathématiques* Vol 10 n°2-3 pp 133-169

Vannier G. (2001) Argumentation et droit (PUF)

Vignaux G. (1976) L'argumentation, Droz

Annexe 1 (Chapitre 3) ***Les trois nombres qui se suivent***
2ème problème : Impossibilité

Productions individuelles (Classe n°5 - 7/11/95)

Pour chaque élève, le type de procédure est indiqué en italique à la première ligne et la réponse à la question « Pourquoi il n'y a pas de solution pour 25 » à partir de la seconde. [22]

Ahmed *Essai de 7 triplets entre 10 et 20*
Parce que l'on ne peut pas

Angélique *Pas de calcul*
Par exemple 7+8+9 = 24 on a trouvé une solution pour 27, 45, 24

Aurélie *Pas de calcul apparent*
On rajoute un nombre et ça en fait un de trop exemple 8+9+10 = 27, 7+8+9 = 24. On peut pas faire 10 x3 ça fait 30, je peux pas faire 10x2 il faut faire trois chiffres

Betty *Essais de triplets comprenant 7+8+9 et 8+9+10 suivis d'autres essais croissants ou décroissants*
Parce que si je prends 3 nombres c'est soit plus grand ou plus petit et elle nous a demandé de faire 3 nombres qui se suivent on peut y arriver en ne mettant pas les nombres en train de se suivre et aussi on peut trouver la solution en écrivant que 2 nombres.

Brahim *Pas de calcul apparent*
On fait 7+8+9 = 24 et si on rajoute 1 nombre on fait 27. 25 on ne peut pas l'additionner avec 3 nombres

Bruno *Essai de triplets (le bilan doit être mental)*
Il n'y a pas de solution pour 25 parce que il n'y a pas de nombres qui se suivent qui font 25 si tu fais 7+8+9 = 24 ça n'est pas assez, si tu fais 8+9+10 = 27 c'est trop.

Carole *Essai de triplets comprenant 7+8+9 et 8+9+10 suivis d'autres essais au voisinage de 25*
Parce que c'est un chiffre impair et t trop petit

Jennifer *Essai de triplets comprenant 7+8+9 et 8+9+10 suivis d'autres essais au voisinage de 25*
Parce qu 25 on peut faire 7+8+9 = 24 ça fait trop bas. On peut faire 8+9+10 = 27 ça fera trop haut. On peut essayer de faire toutes les opérations qu'on veut, on ne réussira jamais. Parce que ça n'est pas un nombre impair

Jenny *Quelques triplets dont 7,8,9*
Parce qu'il faut mettre deux nombres pour faire 25, parce que si je mets 3 nombres ça monte trop haut ou c'est plus bas, si on fait 7, 8, 9 on arrive à 24 et si on mets 8, 9, 10 on arrive à 27

[22] Dans ces annexes, les écritures rayées ou encadrées le sont dans les textes des élèves, les fautes de français ont été corrigées

Jonathan *Essai de triplets comprenant 7+8+9 et 8+9+10 suivis d'autres essais au voisinage de 25*
Parce que on a essayé 7, 8,9 ça faisait 24 et ensuite j'ai essayé 8, 9,10 et ça faisait 27

Julien *Pas de calcul apparent*
Parce que on a essayé avec 7+8+9 = 24 et qu'on a essayé avec 8+9+10 = 27 et ce qu'il nous faut c'est 25 alors on ne peut pas faire 25

Kader *Pas de calcul apparent*
Si je fais 7+8+9 … (si les nombres ne se suivent pas je peux faire 25)

Karim *Essai de triplets de nombre qui se suivent comprenant 7+8+9 et 8+9+10*
[Parce que si on fait 10 fois 1 ça fait faire les 30]. Même si on fait plus petit on ne trouvera pas parce que c'est au milieu quand c'est au milieu on ne peut pas trouver un nombre.

Laetitia *Essai de triplets de nombre qui se suivent autres que 7+8+9 et 8+9+10*
Parce que c'est trop petit ou trop grand , plus j'agrandis les chiffres plus ça devient plus grand et quand on rapetisse les chiffres ça devient petit

Linda P*lusieurs calculs additifs avec deux nombres dont 25*
parce que si on fait 8+9+10 c'est trop haut et 7+8+9 c'est trop bas donc il n'y a pas de solution

Malika *Essai de triplets de nombre qui se suivent autres que 7+8+9 et 8+9+10*
A chaque fois que j'essaie, ça fait soit plus soit moins, mais jamais 25

Mehdi *Essai de triplets de nombre qui se suivent comprenant 7+8+9*
Moi j'ai fait 7+8+9 = 24, 8+9+10 = 27c'est trop haut, parce qu'on le fait de tous les côtés et on ne trouve pas 25

Mélanie *Essai de triplets de nombre qui se suivent entre 10 et 20*
Il n'y a pas de solution pour 25 parce que quand on rajoute un nombre ça nous fait un nombre plus grand que 25

Nicolas *Essai de triplets comprenant 7+8+9 et 8+9+10 suivis d'autres essais au voisinage de 25*
J'ai commencé par 5+6+7 = 18 après j'ai fait 7+8+9 = 24 [inachevé ?]

Sabrina *Essais de triplets de nombres qui se suivent comprenant 8+9+10 et au-dessus*
Si on fait 7+8+9 ça fait 24 ; Alors il nous manque 1, mais si on fait 8+9+10 ça fait 27. Il n'y a pas de solution pour 25. Il y a une solution pour 48, 96, 354 et 45 mais pas pour 25.

Sarah *Pas de calcul apparent*
J'ai fait 7+8+9 = 24 et si je fais 6+7+8= 21 si je fais plus bas j'ai 25 si je fais plus haut il faut que je descende.

Sofian E*ssai de triplets comprenant 7+8+9 et 8+9+10*
Parce que l'on ne peut pas, il n'y a pas de solution

Annexe 2 (Chapitre 3) *Somme et différence*
« Pourquoi est-ce impossible quand S paire et D impaire ? »
Productions par binôme classe n° 6 (26/11/96)

Quatre question avaient été successivement posées aux élèves.
1- est-ce qu'il y a toujours une solution ?
2- comment choisir S et D pour qu'il y ait une solution ?
3- comment choisir S et D pour qu'il n'y ait pas de solution ?
4- pourquoi c'est impossible quand on a S impair et D pair ?

Certains binômes n'ont répondu que partiellement.

Bruno et Jennifer :

1) Non on ne peut pas choisir n'importe quoi
2) Si la somme est impaire la différence est obligée impaire
3)Si la somme est impaire la différence est paire
4) Parce que quand le nombre est impair la différence avance de «2 et quand tu fais la moitié ça fait 1 et si tu ajoutes 1 a u premier et au deuxième la différence avance de 2 alors si ma somme est impaire et que la différence est paire tu ne peux pas

Laetitia et Kevin

1) on ne peut pas choisir n'importe quel nombre pour la somme et la D
2) le calcul est possible si les deux nombres sont impair ou pair
3) le calcul est impossible si le nombre de la somme est pair et le nombre de la différence est impair
4) parce que l'on ne trouve pas le chiffre de la différence mais on trouve la somme

Hichem

1) non et oui il faut savoir s'il y a une addition et s'il y a une soustraction et s'il y a une soustraction et une addition c'est possible. Si les nombres sont pairs ou impairs et il faut la somme impaire et la différence impaire

Betty et Kader

1) non parce que les nombres impair et pair ne vont pas ensemble
2) si les nombres de la somme et de la différence sont pareil c'est à dire impair ou pair
3) quand les nombres ne sont pas pareil c'est à dire non pair ou non impair

Khady et Julien

1) Non on ne choisit pas n'importe quel nombre S et la D
2) Quand la somme ou la différence sont paires ou impaires
3) Quand il y a par exemple la somme est paire et que la différence est impaire on ne peut pas
4) parce qu'on ne trouve pas la solution

Ahmed et Malika

On ne peut pas prendre n'importe quel nombre parce qu'il faut soit avoir deux nombres pairs ou impairs mais quand on a un nombre pair et un nombre impair on ne peut pas.

Parce que ce ne sont pas deux chiffres de la même famille

Sofian et Aurélie

On choisit la différence par rapport à la somme. C'est possible quand la somme et la différence est impaire ou paire

Parce que quand la somme est impaire et que D est paire on n'arrive à côté de la différence

Mehdi et Jenny

C'est impossible quand un nombre est impair et l'autre pair

Sabrina et Linda

1) non quand la somme est paire et quand la différence est impaire c'est impossible. C'est possible si la somme est impaire et la différence est impaire ou le contraire paire et paire

2) parce qu'on ne peut pas additionner la somme et la différence

Angélique et Georges

1) Non on ne peut pas choisir n'importe quel nombre pour la somme et la différence

2) quand on donne un nombre comme 49 et 3. paire

3) quand on donne un nombre comme 65 et 4. Impair

si on donne 65 et 4 il y a un nombre pair et un nombre impair

Sarah et Nicolas

1) non on ne peut pas choisir n'importe quel nombre

2) c'est possible pour un nombre pair

3) c'est pas possible avec les chiffres impair

4) les impair comme 2, 4, 6 8… 60

Carole et Mélanie

Si c'est deux nombres impair ou pair on peut tomber sur la différence mais si c'est un nombre pair et un nombre impair on ne peut pas tomber sur la différence.

Quand la somme est impaire et la différence paire ou le contraire on ne peut pas trouver la différence.

Brahim et Jonathan

1)On ne peut pas parce que 65 est un nombre impair et 4 un nombre pair

2) Il faut choisir deux nombres pairs ou deux nombres impairs

3) Parce que si on fait les deux ça fait plus grand ou plus petit

Annexe 3 (chapitre 4) ***Le plus grand produit***

Production individuelles (Classe n°7 - lundi 3/3/1997 matin)

Asma	Pour trouver le plus grand produit il ne faut pas prendre le chiffre 1 parce que si on prends 10-> 1+1+1+1+1-> 1x1x1x1x1 = 1 c'est un petit nombre. Pour trouver le plus grand produit il faut prendre des petits nombres comme pour 10 -> 5+5 ->5x5 = 25 c'est petit mais si nous prenons pour 10 -> 3+3+4 = 36 c'est déjà plus grand.
Aïcha	Il faut choisir un nombre comme 10 l'additionner en petits nombres comme 3+3+2-> 3X3X2 = 38 [sic]
Alexandre	e prends un nombre comme 10 et ce nombre je propose de le décomposer en petites quantités ex 2+3+2+2+1-> comme ça on a plus de chance de faire un grand nombre. On va le décomposer en le déformant 1x2 2x2x3= 18 ce n'est pas comme
Allison	Si on veut trouver le plus grand produit il ne faut pas prendre de grands nombres il faut prendre les nombres de 2 à 4 et vous pouvez trouver de très grands nombres exemple 14 2+2+3+2+3+2 = 14 2x2x3x2x3x2 = 144 4 x 6 x 6
Hassen	On doit prendre le multiple [sic] de chaque nombre pour les nombres pairs ex : 4+4 = 8 4x4 = 16 2+2+2+2 = 8 2x2x2x2 = 16 ou prendre les plus petits nombres pour les nombres impairs pour trouver une plus grand nombre. 5+5 = 10 = 5x5 = 25 3+2+3+2 = 10 3x2x3x2 = 36
Jessy	Il faut mettre des petits nombres à additionner sauf 1 car 1 nous donnera le même nombre par exemple 9+1 = 10 9x1 = 9 et si j'utilise 2 ou 3 me donnera un grand nombre exemple : 3+3+4 = 10. 3x3x4 = 36 Mais il ne faut pas mettre des nombres au-dessus de 5
Julie	Il faut décomposer un nombre avec des petits chiffres par exemple : 10 (c'est le nombre) 2+3+2+3 -> 3x2x3x2= 36 Comme ces opérations : 3x2 = 6 6x3 = 18 18x2 = 36 que si on fait des opérations comme ça : 5+5->5x5 = 25
Karim A	La méthode c'est qu'il faut prendre plein de petits nombres plutôt que des grands, mais il faut bien les choisir, il ne faut pas prendre n'importe lesquels parce que par exemple si on prend le nombre 1 on ne va pas trouver un grand nombre alors que les petits nombres sont entre 2 et 4.
Karim B.	Il faut décomposer et additionner des petits nombres ex 2+1+2+1+2+2+1 et ça va te donner un grand nombre et après expliquer comment tu as fait et trouver le plus grand résultat de la classe
Kheir	Pour trouver le plus grand nombre, il faut trouver la moitié du nombre : ex : pour 10. 5+5 c'est la moitié de 10 et après on fait 5x5 et nous donne le plus grand nombre ici c'est 25.

Laïla	Il faut prendre un nombre lequel vous voulez. Vous additionnez ce qui peut faire le nombre puis additionnez -les Par exemple 20 10+10 = 20 -> 10x10 = 100
Marc	Pour trouver le plus grand nombre on x,+ ou même ÷ Ex 14 7+5+3 =7x5x3 = 60 ou sinon on peut faire 5+6+3+4 = 5x6x3x4 = 230 je crois
Marli	Pour trouver le plus grand produit il faut prendre des petits nombres et on peut trouver un grand nombre
Mohamed	Pour trouver le plus grand produit il faut : ex ~~5+5+5+65= 5x5x5x5=~~
Patrick	Pour trouver le plus grand produit, il faut prendre des petits chiffres et ces chiffres sont ~~2~~, 3 et 4. Ex : avec 16 je dois trouver le plus grand produit. Si je fais 8+8=8x8=64, et si je fais 3+3+3+3+4 = 3x3x3x3x4 = 324.
Sadat	Si on commence par des petits nombres on peut avoir un résultat plus grand. Ex 2+3+4+2+3+2->2x3x4x2x3x2 = 288
Sanah	Pour obtenir le plus grand produit il faut décomposer avec le nombre qu'on a ex il faut trouver 10 on doit faire des petits nombres comme 2 et 3 mais pas de 1 parce que ça ne sert à rien ex 9x1=9
Sylvain	Il faut choisir plein de nombres petits entre 2 et 13 Ex 14 : 2+4+3+4 ou 5+5+4 ou $\boxed{3+3+3+3+2}$ ou 4+4+4+2 Parce qu'il y a plus de petits nombres
Salim	La maîtresse nous donne un nombre : ex : 10 et pour 10 on le décompose en additionnant des petits chiffres parce que si on décompose 10 avec des grands chiffres ça nous donnera un petit ~~nombre~~ chiffre, mais des petits chiffres ça nous donnera des grands nombres. Ex : 5+5->5x5 = 25 grands nombres 3+2+3+2->3x2x3x2 = 54 petits nombres
Tesnim	Il faut d'abord…quand le nombre il le décompose par exemple 16 on peut faire 8+8 = 16 et après on doit le multiplier 8x8 = 64 ; mais pour trouver le plus grand nombre, mieux vaut faire une décomposition plus longue pour obtenir le plus grand produit par exemple : 3+3+2+4+2+2 = 16 et 3x3x2x4x2x2= 288 et il ne faut pas mettre de 1 ça ne sert à rien les nombres qu'il faut sont 2 à 5 ou 6.
Violette	Il faut décomposer le nombre avec plusieurs petits nombres, il ne faut pas décomposer avec de plus grands nombres.

Annexe 4 (Chapitre 4) ***Le plus grand produit***

Productions individuelles (Classe n°10 produites le 23/5/06)

Ach.	1) Il faut toujours mettre des petits chiffres 2) Si on met des 1 on ne trouvera pas le plus grand nombre
Ali.	1) Il faut mettre que des 2 et des 3 2) Ca ne set à rien de mettre des 1 3) Il faut mettre des petits nombres en premier
Ami.	1) On doit mettre des petits nombres 2 et 3 2) Pas de 1 3) Pas mettre de grands nombres
Ban.	Je propose de ne pas utiliser les x1 parce que ça ne sert à rien et si on utilise 3 et 2 on peut arriver au plus grand produit et si on utilise le plus grand chiffre on arrive au plus petit nombres
Bil.	18 = 3+3+2+3+5+2 3x3x2x3x5x2 = 110 Il faut faire des petits nombres
Cha.	1) x1 est inutile 2) Il faut choisir de petits nombres 3) grand nombre inutile 4) savoir ses tables
Cic.	Il faut utiliser des petits nombres pour avoir un grand nombre. Et si on utilise un grand nombre on aura des petits nombres. Et le 1 ne change rien.
Dyl.	Il faut prendre les grands nombres avant et les petits nombres après.
Haj.	Il faut chercher le nombre le plus grand et il ne faut pas prendre des petits nombres comme 1 ça va nous servir à rien.
Ima	Il faut faire des multiplications
Ism.	Il ne faut pas mettre de 1 Sinon on peut mettre out le reste (2,3,4,5,6,7,8,9,10,.) Mettre des petits nombres parce que on peut en mettre plus. Et si on en met plu le nombre grandit.
KaÏ.	Pour trouver le plus grand nombre, il faut prendre le plus petit nombre.
Ken.	Pour trouver le plus grand produit, par exemple pour trouver 30 = on peut faire 2+2+2+4+2+2+4+2+4+2+2+2+2->2x2x2x4x2x2x4x2x2x2x2= avec les x2 et les x3 on peut trouver le plus grand produit
Kev	*Uniquement des calculs*
Khal.	1) Ne pas mettre de 1 2) si on ajoute +2+2 le nombre sera plus grand 3) si on un grand nombre le total sera petit
Khav.	18 = 3+2+2+3+2+3+3 = 3x2x2x3x2x3x3= 648
Nar.	Il faut utiliser des petits nombres 2,3,4 Il ne faut pas utiliser le 1 ~~par ce que~~ exemple 1x1 = 1 1x5
Nic.	1) Il faut commencer par un petit nombre et par un grand nombre 2) Il ne faut pas faire +1 (x1)
Sih.	Il ne faut pas multiplier par 1 ça ne sert à rien Si on met des petits nombres on fait un grand nombre Si on met un grand nombre on fait un petit nombre
Sofia.	Mettre des petits nombres au début pas mettre des grands nombres Mettre des 2 ou des 3, 4 N pas mettre de 1
Sofie.	Les plus petits nombres font les grand nombres Le 1 ne sert à rien
Vea	On ne doit pas utiliser des nombres plus que 4 et on ne doit pas utiliser de 1 On doit utiliser que des 2,3,4

Annexe 5 (Chapitre 5) *Cordes*
Descriptif de la situation- Extrait ERMEL CM2 (1999)

Description rapide

Des points étant marqués sur un cercle, le problème consiste à trouver le nombre de cordes obtenues en joignant ces points deux à deux, ceci quel que soit le nombre de points. Dans certaines classes ce problème peut être prolongé par une autre recherche, trouver la somme des n premiers nombres entiers, problème rattaché au précédent dans la mesure où le dénombrement des cordes peut se ramener à la somme des n premiers nombres.

Objectifs spécifiques

- Formuler une méthode générale et la justifier par un raisonnement
- Emettre des hypothèses
- Formuler des conjectures
- Infirmer ou confirmer leur validité par un raisonnement, par une argumentation mathématique

Les trois derniers objectifs correspondent davantage au deuxième problème de la somme des n premiers nombres.

Déroulement

Nous prévoyons deux séances, la première consacrée au dénombrement des cordes et, éventuellement une deuxième séance pour la recherche de la somme des n premiers nombres entiers. Nous précisons en début de descriptif de la deuxième séance les conditions de classe permettant de proposer avec intérêt cette deuxième recherche.

PREMIÈRE SÉANCE : CORDES

Etape 1 : appropriation du problème
1) Présentation du problème

Le maître trace au tableau un cercle, sur lequel il place 6 points, qui ne soient pas trop voisins et disposés de façon irrégulière. Le maître joint deux points et annonce qu'il a tracé une corde (ou bien le rappelle, si cela a déjà été vu en géométrie), il précise que l'on peut ainsi tracer plusieurs cordes en joignant deux points quelconques sur le cercle

Il vaut mieux ne pas désigner les points au tableau, en laissant éventuellement l'initiative aux élèves dans les recherches suivantes.

Consigne " Sur un cercle j'ai placé 6 points cherchez combien y a-t-il de cordes entre tous ces points ?"Il faut bien préciser qu'il s'agit de toutes les cordes possibles, sinon les élèves peuvent spontanément répondre 3 cordes, pensant qu'il suffit de relier les points deux à deux.

2) Recherche individuelle
3) Mise en commun

Confrontation des résultats et des méthodes, qui peuvent être dans cette première étape le tracé et le dénombrement des cordes, avec aides diverses : numérotation des cordes, désignation des points et des différentes cordes sous forme organisée ou à l'aide d'un tableau à double entrée (réinvestissement possible après le travail sur Tournoi, problème du module 2 période 3) ....Exemples de méthodes ayant été produites par des élèves (il ne s'agit pas de les proposer si elles n'ont pas été produites).

AB	BC	CD	DE	EF
AC	BD	CE	DF	
AD	BE	CF		
AE	BF			
AF				

On peut tracer 15 cordes

A : 5   B : 5   C : 5   D : 5   E : 5   F : 5   6 x 5 = 30

	A	B	C	D	E	F
A		X	X	X	X	X
B			X	X	X	X
C				X	X	X
D					X	X
E						X
F						

Il y a 15 cordes

A la fin de cette étape, il est nécessaire que les élèves soient certains que l'on a bien toutes les solutions (15 cordes).

Etape 2 : reprise de la recherche pour 10 points

Il s'agit maintenant de permettre aux élèves de quitter le dénombrement des cordes, une par une, sur le dessin, le nombre de traits (ici 45) le rendant peu fiable ; par contre ils peuvent encore avoir recours à la désignation.

Des méthodes peuvent déjà apparaître et être exprimées lors de la mise en commun, elles peuvent encore s'appuyer sur le dessin : désignation des points, suivi sur le dessin, désignation des cordes ou bien méthode de tracé : on joint le premier point aux 9 autres...,

Exemples :

Je fais 10 pts x 9 =90 90 / 2 = 45

A : 9 B : 8 C : 7 D : 6 E : 5 F : 4 G : 3 H : 2 I : 1 J : 0 ; 9+8+7+6+5+4+3+2+1+0=45

Etape 3 : formulation d'une méthode générale

Le maître demande d'exprimer une méthode permettant de connaître le nombre de cordes quel que soit le nombre de points, il cite, par exemple 32 points, 200 points.

1) Recherche individuelle

On vise la mise en oeuvre et la formulation de raisonnements tels que : " le premier point est relié à tous les autres, le second à tous sauf au premier;" ou des schématisations comme le codage des points par des lettre (A,B,C) ou des nombres et le dénombrement organisé des différents couples (A-B, A-C,...,B-C,..;)" ces deux méthodes conduisent à exprimer le résultat sous la forme 31 + 30 + ...+2 +1 pour 32, avec un calcul à la calculette. On peut voir apparaître aussi une méthode consistant à constater que chaque point est relié à 31 points, et comme il y a 32 points, cela se produit 32 fois ; dans ce cas il faut s'apercevoir que toutes les cordes sont comptées deux fois! Ce qui conduit à exprimer le résultat sous la forme (32 x 31) / 2 pour 32 points. Exemples :

A : 31, B : 30, C: 29 à chaque fois on enlève 1 L'addition 31+30+29+..+0 est posée et calculée Il y a 496 cordes

Pour aller plus vite, on prend le nombre de lettres moins 1 : 32-1=31. Tu multiplies 31 par combien il y a de lettres : 31x32=992. Puis tu prends le nombre que tu as trouvé 992 et tu le divises par 2 : 992 : 2 = 496. Tu trouves 496 cordes. 32 - 1 car tu ne peux pas accrocher A avec A. 32 car il y a 32 points. On le divise par 2 car on ne peut pas faire une corde comme ça : AB, BA

Souvent ne figurent que certaines de ces explications.

2) Mise en commun des méthodes en prenant soin de faire formuler les différentes méthodes et leurs justifications.

On prévoit à la fin de cette première phase que le nombre de cordes est obtenu comme la somme des nombres décroissants de n-1 jusqu'à 0 (ou 1) [23], qui peut être formulé comme par exemple : 31+32+30+..+1.On peut aussi avoir les produits n x (n-1) divisé par 2.La relation numérique (1+2+ ... + n = n(n+1)/2) établie par ce raisonnement et exprimée pour des valeurs données de n, peut apparaître lors de la séance décontextualisée Somme des n premiers nombres comme une des hypothèses formulées par les élèves.

[23] Nous utilisons "n" pour expliquer plus clairement les méthodes. Les élèves, eux , s'expriment avec des valeurs numériques.

Annexe 6 (Chapitre 5) ***Cordes***
Productions des élèves

<u>1- Productions des groupes pour 6 points</u>

1- il y a 30 cordes (avec 15 cordes tracées en couleur sur leur feuille)

2- On a tracé un cercle on a pris des points puis on a tracé des cordes et notre objectif était 15

3- Il y a 15 cordes : pour trouver nous avons relié les points (les cordes ont été cochées lors de leur dénombrement)

4- Nous avons trouvé un résultat de 15 cordes que l'on peut relier ensemble

1=5
2=4
3=3 (accolade) = 15
4=2
5=1
6=0

5- Dans le cercle nous avons trouvé 15 cordes (dessin)

6- On peut avoir 14 cordes car on fait : 5+4+3+2 = 14

<u>2- Productions pour 10 points</u>

<u>a) Quelques procédures de résolution individuelles</u>

- tracé des cordes
- une lettre désigne chaque point
  A= 9, B = 9, C = 9…
  10 x 9 = 90 : 2 = 45
- 10+9+8+… en colonne
- 10x10= 100 : 2 = 50

<u>b) Productions pour 10 (Affiches)</u>

- 1ère affiche :
  - Il y a 44 cordes
  - dessin des cordes
- 2e affiche *(dessin du cercle en dessous de la réponse)*
  - Réponse : il y a 45 cordes

A=9 C=9 E=9 G=9 I=9
B=9 D=9 F=9 H=9 J=9
9 x 10 = 90
90 : 2 = 45 cordes

- 3e affiche (*pas de dessin du cercle et des cordes*)

1=9
2=8
3=7
4=6 *(accolade)* 45
5=5 Nous avons trouvé un résultat de 45 cordes :
6=4 astuces : pour nous aider nous avons additionné le
7= 3 nombre de cordes + le nombre de points
8= 2
9=1
10=0

9+8+7+6+5+4+3+2+1=45

- 4e affiche
  - dessin des cordes avec des couleurs différentes par point et 9 écrit en face du premier point seulement
  - On a trouvé 45 cordes

5e affiche (dessin des cordes)
- « Il y a 45 cordes
on a commencé à tracer les cordes à partir du premier point »

6e affiche
- On peut avoir 55 cordes

(*au dessus de* « 55 cordes » *en diagonale est écrit* « -> 45->31 »

<u>3- Productions pour 210 points</u>

- 1ère affiche :

210 : 10 = 21
21x20 = 420
420 :2=210
210x10= 2100

- 2ère affiche :

On a trouvé 43890 cordes
209
210
209
418..
43890

- 3ère affiche :

209 x210 *multiplication posée*
43890 : 2 *division posée*

- 4e affiche :

10 points = 45 cordes
10 x20 = 200
200 points = 900 cordes
210 points = 945 cordes
Il y a 945 cordes

Annexe n° 7 (Chapitre 5)
Analyse de mises en commun en sciences et en observation réfléchie de la langue

Nous présentons dans cette annexe, des éléments complémentaires à l'analyse conduite dans ce chapitre en mathématiques.

Ces éléments sont extraits de l'article « Savoirs professionnels et spécificités disciplinaires :analyse de mises en commun en mathématiques, en sciences et en observation réfléchie de la langue au cycle 3 » *rédigé par Jacques Douaire, Marie-Laure Elalouf* [24], *Patrick Pommier*[25] *qui est paru en mai 2005 dans la revue « Grand N ».*

Ils portent sur :

- *les fonctions des mises en commun en sciences et en observation réfléchie de la langue*
- *l'analyse des mises en commun observées dans cette classe dans ces deux disciplines*
- *des éléments de comparaison entre les trois mises en commun.*

Compte tenu du caractère collectif et pluridisciplinaire de cette publication, nous préférons placer en annexe ces éléments complémentaires.

1. Fonction des mises en commun

Dans ces mises en commun, les élèves sont conduits à s'exprimer clairement, à apporter des précisions, à écouter et poser des questions en appréhendant les propos d'autres élèves, à formuler des critiques, à produire des arguments à l'appui de leurs remarques. Mais au-delà de la maîtrise de l'oral, elles ont des fonctions spécifiques dans les apprentissages des trois disciplines.

En sciences

La démarche proposée dans le cadre des programmes 2002, peut se résumer ainsi : « Les compétences et les connaissances sont construites dans le cadre d'une méthode qui permet d'articuler questionnement sur le monde et démarche d'investigation »[26].

Les phases de mise en commun interviennent à différents moments au cours d'une séance. D'abord, à partir d'une «situation de départ » qui doit susciter la curiosité, les élèves sont encouragés à poser leurs questions, à les formuler de manière plus précise, à échanger avec leurs camarades pour réaliser que « toutes ces questions ne se valent pas » et pour sélectionner les questions qui méritent une investigation.

Puis une nouvelle mise en commun peut intervenir lors de la présentation des hypothèses ou des conceptions des élèves. Enfin, les élèves vont chercher des éléments de réponse aux questions retenues au cours d'une investigation qui prend diverses formes de travail : expérience, observation, enquête ou visite, réalisation matérielle, analyse de documents. Cette recherche est menée le plus souvent en petits groupes et à l'issue de ce travail, une phase de mise en commun permet de confronter les résultats obtenus dans chaque groupe. Cette mise en commun vise à mettre en place des connaissances et des savoir-faire, mais aussi à s'approprier les modalités d'un « débat réglé » et donc à développer des capacités d'échanges, d'écoute et de respect.

Chez les professeurs des écoles stagiaires et chez certains professeurs des écoles débutants, le «cours dialogué » est préféré au dispositif préconisé par le programme 2002. Le professeur pose un problème ou une série de questions et il donne la parole à quelques élèves

[24] MCF en sciences du langage, IUFM de Versailles - UMR 7114 CNRS-Paris X
[25] PIUFM de SVT IUFM de Versailles, site d'Antony Val de Bièvre, -INRP,
[26] MEN (2002) Qu'apprend-on à l'école élémentaire ? page 243.

à tour de rôle. Le jeu des questions du professeur et des réponses des élèves font avancer le cours jusqu'à la solution aux questions posées. Dans ce dispositif, le professeur maîtrise le déroulement de la séance et le temps. Il a également l'impression qu'il va maîtriser sans problème la classe car c'est lui qui donne la parole aux élèves. Il maîtrise également le cheminement intellectuel en posant les questions et parfois en ne prêtant aucune attention aux questions ou aux remarques qui le dérangent. Dans certains cas, la classe est vivante avec des élèves qui participent. Cela semble beaucoup plus intéressant et efficace que le cours magistral. Au demeurant très peu de professeurs des écoles stagiaires pratiquent le cours magistral en Sciences.

Cependant, le plus souvent avec le cours dialogué, une bonne partie des élèves ne s'investit pas dans la recherche. En effet, il n'y a pas de temps de recherche et il faut trouver rapidement la réponse. Les élèves qui participent essaient de deviner ce que le maître attend. Ils sont guidés par des indices externes à la situation. Parfois le maître donne le début de la réponse et il faut trouver la fin. Les erreurs ne sont pas prises en compte et le rythme du cours est calqué sur celui des meilleurs.

Pour les mises en commun, des difficultés sont régulièrement pointées par les enseignants : comment faire en sorte que l'échange ne se réduit par un dialogue entre un élève et le maître ? Comment amener les élèves à échanger entrer eux ? Comment permettre aux élèves de confronter leurs résultats aux savoirs établis ? Comment faire participer les élèves à l'élaboration de la trace écrite ?

En observation réfléchie de la langue

L'observation réfléchie de la langue invite les élèves à « examiner des productions écrites comme des objets qu'on peut décrire » (Programme cycle 3, 2002), à procéder à des classements et à des manipulations assortis de justifications. Mais en l'absence de documents d'accompagnement, le recours à des mises en commun reste limité à des dispositifs expérimentaux[27]. Il existe un frein à leur extension : les remarques spontanées des élèves sur la langue sont souvent perçues comme déstabilisatrices : elles renvoient les enseignants au conflit entre norme et variation et mettent en défaut des descriptions grammaticales forgées sur des exemples triés, pris à l'écrit. Prenons l'exemple d'un enseignant de cycle 3 qui cherche à faire distinguer les suites du verbe « être » selon qu'il s'agit d'un attribut et d'un complément de lieu, en opposant : « les enfants sont attentifs » (adjectif) et « les enfants sont en classe », « les enfants sont dans la cour » (groupe prépositionnel). Que répondra-t-il à l'élève qui demande comment analyser « les enfants sont en colère », « les enfants sont dans tous leurs états » ?

Les pratiques recensées sont de quatre ordres.

Le débat orthographique permet aux élèves de confronter leurs choix graphiques en produisant des raisonnements qui font appel à des savoirs métalinguistiques et des procédures dont la fiabilité est interrogée.

Les classements amènent les élèves à structurer les différents niveaux de l'analyse linguistique. Le débat opposera par exemple ceux qui auront classé les mots selon leur forme ou leur sens. Ces classements sont particulièrement pertinents pour construire une notion, en morphologie, par exemple celle de verbe. Ils peuvent aussi être proposés en syntaxe (classer des groupes, des phrases selon leur construction), en sémantique (classer des mots ayant un élément de sens commun).

Les manipulations font appel à l'intuition linguistique. Elles doivent faire le départ entre l'énoncé grammatical / agrammatical (sur le plan morphosyntaxique), acceptable /non acceptable (sur le plan sémantique). Les manipulations les plus couramment utilisées à l'école primaire sont la suppression, le déplacement et l'encadrement par « c'est…qui ». Il est souvent difficile, même pour un adulte, d'expliquer ses jugements, surtout sur des énoncés hors contexte. Pourquoi par exemple accepte-t-on à l'oral « le chocolat j'adore » alors que le complément déplacé est essentiel à la construction du verbe ?

[27] Isidore-Prigent, J., 2004, E. Nonnon, 1999, Paolacci, V. & Garcia-Debanc, C., 2004.

Enfin, l'étude d'un corpus peut conduire à l'élaboration d'une règle. Les élèves doivent alors procéder à une généralisation, rechercher d'éventuels contre-exemples, formuler une régularité en termes métalinguistiques. L'exercice, d'un grand niveau d'abstraction, est périlleux s'il n'est pas guidé ; mais il peut engager dans une véritable attitude de recherche[28].

2- Une expérimentation dans les trois disciplines

Nous avons choisi d'observer des séquences ordinaires, mises en œuvre par un même enseignant dans trois disciplines différentes. Les phases de mise en commun ont été enregistrées et transcrites, les productions écrites des élèves collectées. À l'issue des trois séquences, un entretien a réuni le professeur d'école et les trois chercheurs. Les analyses qui suivent sont issues de la mise en relation de ces différents éléments.

Nous allons préciser les apprentissages visés, des éléments de gestion des mises en commun et des contraintes liées aux dispositifs didactiques.

2.1 L'apprentissage visé

En observation réfléchie de la langue

Très à l'aise dans les mises en commun en mathématiques et en sciences, l'enseignante que nous avons observée a rencontré plus de difficultés en français. Difficultés liées à la discipline elle-même, plus précisément à la représentation majoritaire qu'en ont les enseignants ainsi qu'à la nature et à l'histoire des contenus enseignés. Ce sont ces difficultés que nous allons présenter en les formulant sous forme de questions qu'un enseignant peut se poser au moment de la préparation, et dont la réponse ne va pas de soi *:*

- comment définir l'objectif d'apprentissage ?
- doit-on viser l'exhaustivité au regard de la description grammaticale ou faire des choix ?
- faut-il communiquer l'objectif aux élèves ?
- comment leur faire comprendre le niveau d'analyse linguistique dont relève l'apprentissage visé ?
- les élèves disposent-ils de procédures pour atteindre l'objectif visé ?

Dans la séance observée, l'objectif poursuivi n'est pas explicite : on ne peut le déduire qu'à l'issue de la dernière synthèse. Il s'agit pour l'enseignante de faire découvrir aux élèves un fonctionnement linguistique commun à des groupes de mots de nature et de constructions différentes : les expansions du nom. Si les élèves savent identifier certaines classes de mots par commutation, ils ne disposent pas de procédures pour mettre en évidence des équivalences fonctionnelles ni sémantiques. La tâche proposée est donc difficile.

Le discours de l'enseignant se caractérise par des glissements constants entre les différents niveaux d'analyse linguistique, ce qui n'aide pas les élèves à situer l'apprentissage visé. Par exemple le professeur annonce que les élèves vont devoir s'intéresser *aux noms communs* (morphologie) *et à ce qui entoure les noms communs* (syntaxe) mais la question récurrente est *à quoi ça sert ?* (sémantique, pragmatique), à laquelle il est d'abord répondu à *compléter le nom* (syntaxe, sémantique), puis *enrichir le nom* (sens et référence étant confondus).

En sciences

L'objectif poursuivi au cours de cette séance, est d'amener les élèves à construire des compétences notionnelles sur la digestion, à réaliser que les aliments mis dans la bouche vont être transformés peu à peu en une sorte de « soupe très liquide » et que ces transformations sont dues à des actions mécaniques et à l'action de différents sucs digestifs : salive, suc gastrique, suc pancréatique, suc intestinal.

---

[28] Pour des exemples, on se reportera à Tomassone, R., Leu-Simon, C.,*Grammaire pour lire et écrire, cycle 3*, Delagrave, 2004.

Les élèves ont déjà travaillé sur le trajet des aliments et semblent le connaître. Au début de la séance, un temps assez bref est consacré à un rappel sur ce trajet et les élèves n'éprouvent pas de difficultés particulières pour nommer les différents organes. Cet échange se déroule sous la forme d'une série de questions suivies de réponses brèves.

Après avoir mâché un petit morceau de pain, les élèves réussissent à formuler assez facilement que les aliments sont mâchés par les dents et imbibés de salive. La Maîtresse reformule ce qui vient d'être énoncé : « On met des aliments dans la bouche. On mâche. La salive imbibe les aliments ».

À partir d'un extrait de manuel[29] les élèves trouvent que les aliments mangés par le lapin subissent des transformations, que ces aliments deviennent une sorte de purée épaisse dans l'estomac, puis une soupe liquide dans l'intestin grêle et enfin des crottes dans le gros intestin.

Après un temps de travail en petits groupes sur les causes de ces transformations, la séance va s'achever sur un échange entre les élèves à partir de leurs productions écrites. Les notions visées : les aliments sont broyés, malaxés mais ils sont également transformés par l'action des sucs digestifs, seront revues et explicitées lors de futures séances.

2.2 La gestion des mises en commun

En observation réfléchie de la langue

La séance se décompose en deux phases composées de la même façon :

- les élèves doivent reconstituer individuellement un texte, confronter leurs résultats en groupe ;
- après une rapide mise en commun, ils doivent élaborer une règle en groupes sur une affiche qui sera accrochée au tableau pour une seconde mise en commun, plus longue.

Les mises en commun qui suivent les reconstitutions de texte sont très brèves et n'appellent pas d'explication, même en cas d'erreur. Nous sommes devant un cas typique de malentendu en cours de français. Pour l'enseignante qui connaît le texte à reconstituer, la mise en commun est une simple vérification qui relève de l'évidence : elle laisse peu de temps à la confrontation des résultats des élèves au sein des groupes et attend « la solution ». Pour les élèves en revanche, qui ne connaissent ni le texte, ni son contexte, il faut argumenter pour éliminer ou retenir telle proposition.

Les mises en commun qui suivent la production d'affiches sont plus longues. Par exemple, la maîtresse donne la parole à un élève qui expose le travail de son groupe, sollicite l'avis de la classe, appelle un autre groupe pour compléter le propos, sollicite à nouveau l'avis de la classe qui valide l'erreur du second groupe, délègue la parole à l'élève au tableau (« tu interroges »), pousse dans ses retranchements un élève qui perçoit une contradiction (« va jusqu'au bout de ta pensée ») et lui laisse le temps de formuler son objection.

En sciences

Il y a en fait deux types de mises en commun. Dans les deux premières, un très court temps de réflexion individuel durant lequel les élèves n'écrivent rien, est suivi d'un échange fortement guidé par la maîtresse. Celle-ci pose des questions et les élèves essaient d'y répondre. C'est elle qui valide ou non, immédiatement les réponses. Il y a peu d'interactions entre la maîtresse et les élèves et aucune entre les élèves eux-mêmes.

Parfois les questions sont fortement orientées et guident vraiment les élèves. Par exemple, lors de l'échange sur le contenu des divers organes du tube digestif du lapin, comme

[29] Rolando J.-M., Simonin G., Pommier P., Nomblot J., Laslaz J.-F., Combaluzier S. 64 enquête pour comprendre le monde, Paris, Magnard, 2003

les élèves ont un peu de mal à imaginer le contenu de chaque organe, la maîtresse demande ce que rejette le lapin. Ce qui permet d'attribuer les crottes solides au gros intestin.

M : Alors le document présente 5 coupelles…
M : la dernière coupelle, ça va être …
E : ….
M : À la fin ça donne quoi ?
E : des crottes
M : Dans quelle coupelle il y a des crottes ?

Le second dispositif est celui de la fin de la séance. Des questions précises ont été sélectionnées et recopiées dans les cahiers :

1- Comment la purée se transforme-t-elle en soupe ?
2- Quelles actions mécaniques subissent les aliments ?
3- D'où viennent les liquides qui imprègnent ces aliments ?
4- À votre avis, où est passé le liquide pendant la formation des crottes solides ?

Les élèves disposent de trente minutes pour travailler en groupe et écrire ensemble la réponse à chacune des questions. La mise en commun dure environ dix minutes et se fait à partir des productions écrites des groupes. La maîtresse est assise au début d'un des rangs. Elle demande à une élève de venir exposer les résultats obtenus dans son groupe, durant environ 5 minutes. À aucun moment l'élève n'est interrompue. À la suite de cette présentation, la maîtresse demande aux élèves de dire s'ils sont en accord avec ce qui vient d'être dit, s'ils ont trouvé autre chose. Elle se contente de donner la parole et de demander à chacun de respecter des règles pour s'exprimer : lever le bras pour avoir la parole, par exemple. L'élève qui présente les résultats de son groupe s'exprime sans difficulté majeure. Le débat se déroule dans une bonne ambiance : les élèves se centrent bien sur le sujet, disent clairement ce qu'ils ne comprennent pas. Tout cela dénote que cette pratique est régulière dans la classe et que les élèves ont déjà des habitudes pour échanger. Ceci est confirmé lors de l'entretien avec la maîtresse.

2.3 Les contraintes liées au dispositif didactique prévu

En observation réfléchie de la langue

L'examen des tâches proposées aux élèves permettent d'attribuer les difficultés dans les mises en commun et les incidents au dispositif prévu et d'identifier des questions que peut se poser un enseignant lorsqu'il prépare une telle séance :

- Va-t-il choisir de travailler sur un texte authentique ou sur des exemples forgés ?
- S'il retient la première solution, a-t-il analysé les emplois de la forme à étudier ? sont-ils canoniques ou atypiques ? sont-ils décrits dans les grammaires ?
- Peut-il anticiper sur les savoirs et savoir faire que les élèves vont mobiliser pour résoudre la tâche proposée ? sur les outils ou les aides qui leur seraient nécessaires ?

Dans la séance observée, seule la moitié des élèves reconstitue correctement le premier texte dont la difficulté a échappé au professeur : emploi métaphorique (des points de surveillance), nominalisation (une réaction au froid), syntagme figé (chair de poule). Même chose pour le second texte qui est un texte littéraire, certes déjà étudié par les élèves en lecture, dont les pronoms relatifs ont été supprimés. Par ailleurs, il ne suffit pas de savoir restituer un élément manquant pour expliciter sa fonction syntaxique et son rôle sémantique. Les élèves, qui travaillent sans documents comme en sciences, produisent des discours confus, révélant la fragilité de leurs acquis :

«Que représente un complément d'objet direct
Qui représente quelqu'un ou quelque chose. »

Ils recourent de façon mécanique à la question de quoi ? sans s'interroger s'il s'agit d'un complément du verbe ou du nom. Cette utilisation, qui relève plus du truc que d'une réflexion grammaticale, surprend le professeur qui parvient toutefois à faire énoncer la distinction par un élève, comme on l'a vu plus haut. Mais l'étude de la suite des débats montre que la majorité de la classe n'entend pas l'argument et persiste dans son utilisation peu rigoureuse des questions.

En sciences

La première mise en commun amène à formuler que dans la bouche les aliments sont mâchés et imbibés de salive. On peut penser que la Maîtresse veut aller très vite car à son avis les élèves savent cela. Ce qui semble être le cas.

La seconde permet de compléter un document écrit au tableau qui traduit l'aspect du contenu des différents organes, chez le lapin.

Organes	Aspect du contenu
Bouche	Herbe
Estomac	Sorte de purée épaisse
Intestin grêle	Sorte de soupe liquide
Gros intestin	Crottes

À nouveau, la maîtresse va très vite. Or, les élèves ne semblent pas avoir d'idées sur le contenu des différents organes et comme ils n'ont ni le temps ni les moyens pour chercher des éléments de réponse, c'est donc la Maîtresse qui guide fortement les réponses.

La grande différence lors de la troisième mise en commun est que les élèves ont vraiment du temps pour dire ce qu'ils ont trouvé, pour échanger, se contredire et argumenter. C'est sur l'aspect des connaissances que cette mise en commun est un peu pauvre, car lors du temps de travail en groupe qui précède, les élèves ne mènent pas vraiment une recherche à partir des questions posées puisqu'ils ne disposent d'aucun support. Ils échangent entre eux à partir de leurs conceptions.

Les réponses écrites au tableau.

Question1- Comment la purée se transforme-t-elle en soupe ?
C'est grâce à l'estomac
Question 2- Quelles actions mécaniques subissent les aliments ?
Ils subissent l'écrasement
Question 3- D'où viennent les liquides qui imprègnent ces aliments ?
C'est la salive, car la salive est de l'eau

On constate que ces réponses sont précises, relativement correctes mais assez pauvres. Elles ne vont pas vraiment au-delà de ce qui avait déjà été dit dès le début de la séance, à savoir : les aliments sont écrasés ; la salive intervient dans la transformation des aliments. Seule l'intervention de l'estomac dans les transformations mécaniques est ajoutée.

En fait, ce travail aurait été plus riche si pour trouver des éléments de réponse aux questions formulées, les élèves avaient mené une véritable investigation en faisant soit des expériences, des observations, des enquêtes, des analyses de documents…Ils auraient pu par exemple, utiliser l'encyclopédie présente dans le manuel d'où est extrait le document distribué aux élèves.

2.4 La confrontation entre les pratiques effectives et l'entretien

Interrogée sur les conditions de réussite des mises en commun, l'enseignante ne cache pas les difficultés rencontrées dans la séance de français ; elle avance plusieurs raisons - manque d'aisance dans la discipline, flou des instructions, manque d'outils testés – mais affirme paradoxalement que ses élèves ont bien travaillé. Si elle appréhende finement les dimensions éducatives des situations de débats (contrat initial, droits et devoirs, nécessité d'expliquer une réponse), les enjeux cognitifs semblent minorés.

Les tableaux ci-dessous récapitulent les conditions du débat et les interventions de l'enseignante.

Conception du dispositif	Français	SVT	Math
Dispositif de la séquence	Elaboré	Adapté	Repris
Document de travail	2 courts textes à trous (littéraire et non)	Manuel	ERMEL
Nature de la séance	Synthèse de connaissances	Investigation	Problème-ouvert
Objectif de la séance	Expliquer le rôle d'un élément dans un ensemble	Expliciter des phénomènes	Elaborer une méthode

Conception du débat	Français	SVT	Math
Préparation permettant un débat sur des questions de savoir	non	éventuellement	oui
Produit soumis au débat	Propositions sur le rôle des compléments du nom et des pronoms relatifs	Des hypothèses (des affirmations a priori)	Résultats et méthodes
Nature des limites au débat rencontrées dans la préparation	Conception du savoir	Organisation didactique	aucune
Contradictions identifiables par les élèves	Oui mais sur la description grammaticale, pas sur la question	Oui, mais sur des hypothèses ou des conceptions	oui
Formulation de critique par les élèves	Critique par un seul élève, soutenu par la M	oui	oui
Enchaînements énoncés /critique sans intervention du maître	non	oui	oui

Interventions du maître	Français	SVT	Math
Présentation du débat	oui	oui	oui
Interventions facilitant l'écoute	oui	oui	oui
Sollicitation des élèves	oui	oui	oui
Reformulations	non	non	oui
Demandes d'explicitation	oui	oui	oui
Enregistrement d'un accord	oui	oui	oui
Demande d'avis contraire	oui	oui	oui
Expression d'un doute	oui	non	non
Expression d'un désaccord	non	non	non
Correction d'une erreur	non	non	non
Institutionnalisation d'un savoir	Oui mais problématique	Non, Mais après la séance.	non

Résumé

Cette étude porte sur le développement des preuves produites par des élèves de l'école primaire (CM1 ou CM2) lors de la résolution de problèmes arithmétiques, à partir d'observations menées sur plusieurs années lors de l'élaboration d'une ingénierie didactique (ERMEL) dans des classes situées en ZEP.

L'analyse privilégie trois axes : les raisonnements et les arguments élaborés par les élèves, les caractéristiques des problèmes et les variables des situations didactiques, la gestion des phases collectives par les enseignants.

L'approche théorique utilisée se réfère à la théorie des situations didactiques, et à des travaux sur l'argumentation et la preuve. Elle permet de caractériser pour ces niveaux des preuves par exhaustion, la production de contre-exemples, la production de raisonnements s'appuyant sur des propriétés connues.

La construction d'une nouvelle typologie des preuves permet a posteriori d'analyser les preuves produites et leur évolution (au niveau des procédures, des propositions, des justifications).

L'étude de séquences, menées plusieurs années de suite, au début et à la fin de l'élaboration de situations didactiques, met en évidence l'importance des phases de formulation et les conditions relatives à la gestion de mise en commun.

Mots clefs

Argumentation en mathématiques - Ecole primaire - Enseignement des mathématiques - Mise en commun - Preuve - Situation didactique- Validation.